eindverhandeling

(verbeterde versie 2 augustus 2004)

logische en ontologische aspekten van ruimte en tijd in axiomatieken voor de speciale relativiteitstheorie

Koen Lefever

2e lic. Wijsbegeerte, Examencommissie van de Vlaamse Gemeenschap

Promotor: prof. dr. Jean Paul Van Bendegem,
Centrum voor Logika en Wetenschapsfilosofie, Vrije Universiteit Brussel

akademiejaar 2003-2004

Grootheden in ruimte en tijd zijn betrekkelijk.
Laat de mensch zich deze waarheid goed voor den geest houden,
en hij zal zich wat inbinden in zijn beslissingen ten opzichte van de ***duurzaamheid*** *in de natuur*
J.B.P.A. Lamarck[1], "Zoölogische philosophie", 1809

Inleiding

Tot aan het einde van de negentiende eeuw werden ruimte en tijd als verschillende dingen beschouwd. Hoewel men reeds eerder ideeën had betreffende meer-dimensionale ruimten, was het met de speciale relativiteitstheorie[2] die geformuleerd werd tussen de jaren 1887 en 1914 dat de ruimte en tijd geïntegreerd[3] werden tot één vierdimensionale tijdruimte[4].

In deze eindverhandeling worden axiomatische modellen die de tijdruimte volgens de speciale relativiteitstheorie beschrijven onderzocht op logische strukturen en ontologische inhouden. In het eerste hoofdstuk wordt de plaats van de speciale relativiteitstheorie binnen de natuurkunde en het denken over ruimte en tijd besproken. De speciale relativiteitstheorie is een theorie waarbij abstraktie gemaakt wordt van de massa van snel bewegende deeltjes, het ideale geval en bijlangrijkste voorbeeld hiervan is het foton, het massaloze deeltje dat beweegt tegen de lichtsnelheid[5]. De algemene relativiteitstheorie is een geometrisch model van de zwaartekracht, en

---

[1] Nederlandse vertaling door J. Metzelaar, "Zoölogische philosophie, of beschouwingen over de natuurlijke historie der dieren etc.", "Maatschappij voor goede en goedkope lectuur" Amsterdam 1921. Nadruk op "duurzaamheid" door Lamarck zelf.

[2] Jules Henri Poincaré introduceerde het relativiteitsbeginsel voor het elektromagnetisme in 1904. De relativistische transformaties werden ontdekt door Woldemar Voigt in 1887 en voor het eerst in vierdimensionele vorm gepresenteerd door Roberto Marcolongo in 1906; het vierdimensionele tijd-ruimte model voor de speciale relativiteitstheorie wordt meestal "Minkowski-ruimte" genoemd, naar Hermann Minkowski die de vierdimensionele relativistische vergelijkingen presenteerde te Keulen in 1907.

[3] Het woord "geïntegreerd" mag hier in de wiskundige zin geïnterpreteerd worden. Zie [ST&EM] voor de uitwerking.

[4] De termen "tijdruimte" ("timespace") en "ruimtetijd" ("spacetime", "Raum-Zeit") worden beiden gebruikt, meestal wordt voor "ruimtetijd" gekozen omdat "Zeit-Raum" in het Duits dubbelzinnig zou zijn.

[5] Het foton beweegt tegen de "lichtsnelheid" omdat het massaloos is. Dit werd recentelijk in vraag gesteld,

een veralgemening van de speciale theorie in die zin dat ze de beperking van de speciale theorie dat de assenstelsels eenparig moeten bewegen niet meer oplegt[6]. De relativiteitstheorieën worden meestal beschouwd als het hoogtepunt van de klassieke natuurkunde. De wetten van de mechanika werden met de wetten van het elektromagnetisme verenigd in één geometrische theorie. Terwijl de klassieke natuurkunde op dergelijke grandioze wijze haar eindpunt bereikte, veranderde de natuurkunde volstrekt van uitzicht met het ontstaan van de kwantumfysika.

In het eerste hoofdstuk wordt ook ingegaan op de axiomatische methode. De wiskundige benadering van problemen uit de natuurkunde en meer specifiek dat van de beweging door ruimte en tijd, is reeds het onderwerp van studie sinds de klassieke oudheid. De klassieke axiomatiek van Euklides' Elementen is het begin van een traditie die in dezelfde periode als die waarin de relativiteitstheorieën onstaan weer op hernieuwde belangstelling mocht rekenen onder wiskundigen en logici. Dit was vooral te danken aan het programma van David Hilbert betreffende de konsistentie van de wiskunde, dat uiteindelijk tot de stellingen van Kurt Gödel leidde.

In het tweede hoofdstuk worden dan axiomatieken voor de speciale relativiteitstheorie ingevoerd. Er zijn twee groepen van axiomatieken voor de speciale relativiteitstheorie te onderscheiden. De eerste groep, hier vertegenwoordigd door Ray D'Inverno, legt de eindresultaten van de topologische studie van de tijdruimte vast. Een tweede groep, hier vertegenwoordigd[7] door Robert Goldblatt en John W. Schutz, werkt verder op het werk van Alfred Arthur Robb uit 1914 waarin een tijdruimte wordt opgebouwd vanuit een ordinale relatie die een mogelijke kausaliteit[8] voorstelt. De tijdruimte-vertakkingen van Nuel Belnap kunnen ook tot de ordinale traditie gerekend worden, maar dit is een logisch protofysisch systeem en niet fysisch-wiskundig.

In het laatste hoofdstuk zullen dan de belangrijkste begrippen besproken worden en konklusies getrokken worden. De bedoeling is om van de natuurkunde via de wiskundige axiomatieken tot een logische behandeling te komen en zo de ontologische basisbegrippen op te sporen: "[…] *fundamental physical theory at any time breaks up into three levels of increasing theoretical abstraction, generality and dept. 1) At the top, there are those statements which concern themselves directly with the distribution of matter as we see it around us: roughly speaking, the theory of Mechanics.* […] *2) This theory employs the concept of a deeper Geometry, to tell us about what matter is distributed in: space. 3) Moreover, underlying Geometry is a still deeper physical theory, seldom formulated explicitly; Geometry itself is after all an exercise in Logic, classically.*" [9]

---

omdat er aanwijzingen zijn dat een foton tijdens haar reis zou vertragen. De term "massaloze snelheid" of "universele maximale snelheid" zou dus korrekter kunnen zijn. Afgezien van dit voorbehoud gebruik ik verder de term "lichtsnelheid" voor zowel de snelheid van het licht als voor de maximale snelheid van een massaloos deeltje.

[6] Het is wel mogelijk om in de speciale relativiteitstheorie te werken met massa of versnellende assenstelstels indien de "toestand tot nu toe" steeds herberekend wordt. Met dank aan Jan Broekaert om me hierop te wijzen.

[7] andere onderzoekers van axiomatieken in de ordinale stijl zijn B. Mundy ("The physical content of Minkowski geometry" British Journal of Philosophy of Science 37 (1986) en "Optical axiomatisation of Minkowski space-time geometry", Philosophy of Science 53 (1986)) en J. A. Winnie, ("Special Relativity without One-Way Velocity Assumptions: Part I & Part II", in Philosophy of Science, v. 37 (1970), pp. 81-99 & 223-238). In [LART] wordt een axiomatiek voorgesteld in zowel eerste orde als in kategorische vorm. Zie [IAM 3-5] voor een opsomming en beknopte beschrijving van en referenties naar enkele andere axiomatieken voor zowel speciale als algemene relativiteitstheorie.

[8] Met mogelijke kausaliteit bedoel ik een formele binaire operator (na), zoals in "B(na)A" dat geïnterpreteerd kan worden als "A heeft mogelijk een kausale invloed op B" oftewel "A ligt in het kausale verleden van B".

[9] David Finkelstein: "Matter, Space and Logic", Boston studies in the Philosophy of Sience, V, 1966

Hoofdstuk 1: situering van de problematiek

We are quite unable to obtain a direct knowledge of absolute distances;
& we cannot compare them with one another by a common standard.
We have to estimate magnitudes by the ideas through which we recognize them;
& to take as common standards those measures which ordinary people think suffer no change.
But philosophers should recognize that there is change;
but, since they know of no case in which the equality is destroyed by a perceptible change,
they consider that the change is made equally.
Robert Boscovich sj[10]., "Natural Philosophy – Appendix II", 1763

1.1. De hoedanigheid van ruimte en tijd in de klassieke oudheid.

In de klassieke Griekse wijsbegeerte komen een aantal problematieken betreffende ruimte en tijd aan bod. Vanuit het begrip plaats (topos) wordt het begrip ruimte uitgewerkt. Een centrale diskussie is of er al dan niet lege ruimte bestaat, het vraagstuk van ruimte en tijd is verbonden met dat van de materie. De beweging wordt herkend als het verband tussen ruimte en tijd.

Het vuur van **Heraklitos** is een konstante in een vergankelijke wereld, of andersom, de vergankelijke wereld bestaat in het allesverterende vuur, de laatste eenheid. De vergankelijkheid speelt zich af in een "kosmos", een wereld die zoals een sierraad (de oorspronkelijke betekenis van het woord kosmos) mooi geordend is. Hij beschrijft een wereld die steeds in verandering is.

Meestal, en meer bepaald door Plato, wordt de beschrijving van de werkelijkheid door Heraklitos beschouwd als het tegengestelde van de statische wereld van **Parmenides van Elea** die stelt dat het niet-zijnde niet bestaat zodat verandering onmogelijk is. De wereld van Parmenides is de wereld van de logische proposities die we later in de klassieke logika zullen terugvinden en bestaat uit universeel ware of onware uitspraken, niet beïnvloed door ruimte en tijd. Parmenides van Elea heeft met Heraklitos een fundamenteel inzicht gemeen: "*Het vermeende niet-tegenwoordige en niet-existente is in het verborgene medeaanwezig. Het beperkte gemiddelde verstand wil dat niet geloven, maar de mens beschikt over het vermogen in te zien dat ook het niet-tegenwoordige tegenwoordig is.*"[11] Bij beiden is er geen plaats voor de leegte, de wereld is een kompakt plenum. Parmenides had zich de vraag gesteld hoe men meer kan weten dan iets wat slechts een mening (doxa) is. Hij voert de Geest in die het Zijn kan schouwen: "*De Geest* [is] *het orgaan dat op niets anders is afgestemd dan op waarneming van het Zijn. En omgekeerd geldt voor het Zijn dat het uitsluitend voor de Geest optreedt.* [...] *'Geestelijke waarneming en Zijn zijn hetzelfde.' Het Griekse woord waarmee Parmenides de geestelijke waarneming aanduidt, vertaalt men gewoonlijk met 'denken'. Daarom is deze uitspraak bekender in de vertaling: 'Denken en Zijn zijn hetzelfde.'*"[12] Voor deze Geest is er bijgevolg geen niet-zijn en dus ook geen veelheid aan zijnden. Parmenides presenteert zijn systeem in een leerdicht, dat hij in de mond van een godin legt. Door deze vorm drukt hij het verhevene van zijn boodschap uit: hij heeft het niet meer over meningen maar over de waarheid, die hij het "onverborgene" (aletheia) noemt.

De konklusies van Parmenides, die Zeno van Elea trachtte te bewijzen in zijn paradoxen (= tegen de doxa), waren moeilijk aanvaardbaar. Empedokles, Anaxagoras, Leukkippos en Demokritos reageerden hierop door te proberen die konklusies van Parmenides, die ze niet konden weerleggen, in overeenstemming te brengen met het normale wereldbeeld van het dagelijkse leven. **Empedokles** erkende vier elementen (aarde, water, lucht, vuur), die we nu eerder 4 aggregatietoestanden zouden

[10] Engelse vertaling: MIT Press 1966
[11] [TP 55]
[12] [TP 56-57]

noemen (vast, vloeibaar, gas, plasma) en die de rol van kleine elementaire bouwstenen speelden. Voor de vroege atomisten **Leukkippos** en **Demokritos** sluiten materie en ruimte elkaar uit: waar materie is, is er geen leegte (kenon) en waar leegte is, is er geen materie. De lege ruimte is het interval tussen de korpuskules. De oplossing van Leukkippos en Demokritos was het atoom: een ondeelbaar elementair deeltje dat, omdat het niet in een veelvoud kon ontleed worden, op zichzelf een parmenedeïsch zijnde is: "*Een derden vorm en wel een waarvan op den duur een zeer belangrijke invloed op de ontwikkeling der natuurwetenschap zou uitgaan, ontmoeten we in de door Leukippos en Demokritos opgestelde atoomtheorie. Deze theorie blijft in zoverre meer getrouw aan de Eleatische grondgedachte dan de twee bovengenoemde* [= Empedeklos & Anaxagoras[13]], *dat zij de qualitatieve eenheid van het zijnde handhaaft en slechts het quantitatieve opoffert. De atomisten breken als het ware den zijnsbol van Parmenides in kleine stukjes en zij verstrooien deze zijnsfragmenten in wat de Eleaten het niet-zijnde hadden genoemd, de lege ruimte. Aan dat niet-zijnde kennen ze dus een eigen zijn toe, terwijl de fragmenten van wat eens dit praedicaat bij uitsluiting had gedragen, in het bezit worden gelaten van het beeld van Parmenides aan het gehaal toekwam; daarbij hebben ze nu echter de beweeglijkheid verworven. Ze hebben overigens geen andere hoedanigheid dan de ruimtelijke uitgebreidheid en de daarmee onverbrekelijk verbonden gedachte ondoordringbaarheid; het zijn brokstukken van eenzelfde niet nader te bepalen zijnde, dat men een oermaterie zou kunnen noemen en ze verschillen onderling alleen in gedaante en in grootte.*"[14] Hun oplossing was natuurlijk een schijnoplossing, want de redenering van Parmenides gaat nog steeds op voor de veelheid aan atomen. Bij de latere atomist Lucretius wordt de lege ruimte de ontvanger van de materie: "there are bodies and there is the void in which these bodies are placed and through which they move about."[15]

Het is pas met **Plato** dat er voor het eerst een konsistente oplossing komt: "*'Zijn' kan - en dat is Plato's verbluffende ontdekking - verhevigd en verminderd worden. 'Zijn' in de superlativus, in de volledige betekenis, bezitten alleen de ideeën. Die vormen een eigen rijk van onverminderd, waarachtig zijn.*"[16]

Er zijn voor Plato twee werelden, één van de ideeën en één van de verschijningen. De wereld van de ideeën is statisch, zoals die van Parmenides, die van de verschijningen is onderhevig aan verandering, zoals die van Heraklitos.

Aristoteles ontkent het bestaan van lege ruimte (vacuum). Ruimte is de som van plaatsen (topos). De plaats heeft geen onafhankelijk bestaan van de materie, het is dat deel van de ruimte waarvan de begrenzing samenvalt met de begrenzing van het lichaam dat het bevat, ruimte is dus voor Aristoteles een eigenschap van de materie en niet iets dat op zichzelf bestaat.

Oorzaken worden ontleed in doeloorzaak, vorm-oorzaak, materiële oorzaak en werkzame oorzaak. De beweging wordt in eerste instantie veroorzaakt door een eerste onbewogen beweger en heeft een "tussenstof" als drager. Voorwerpen vallen omdat ze de eigenschap "zwaarte" hebben. Het is deze visie op de natuurkunde die Galileo Galileï zal aanvallen.

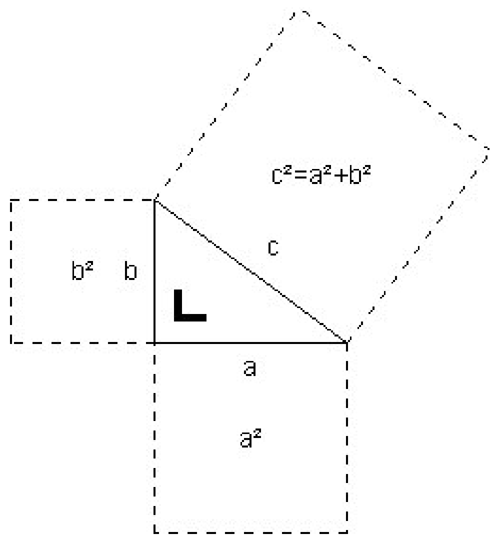
---

[13] "*de theorie van de homoiomeren van Anaxagoras, waarin een onbegrensde verscheidenheid van qualitatief verschillende grondstoffen wordt aangenomen, die verdeeld zijn in corpuscula die zelf weer onbeperkt verder deelbaar woden gedacht.*" [MWB I:7]
[14] [MWB I:8-9]
[15] geciteerd in [COS 12]
[16] [TP 125]

1.2. De hoeveelheid van ruimte en tijd in de klassieke oudheid.

Aan **Thales** wordt toegeschreven dat hij de wiskundige kennis van de Babyloniers en Egyptenaren[17] naar Griekenland heeft gebracht. De Babyloniers en Egyptenaren hadden astronomische en geometrische kennis, in eerste instantie afkomstig van priesters die de hemel bestudeerden en van een belastingsadministratie die het land opmat. Tot op heden zijn enerzijds de mystieke aantrekkingskracht en anderzijds de technologische toepasbaarheid belangrijke charmes van de wiskundige benadering van de werkelijkheid.

Pythagoras van Samos[18] ontdekt dat er een overeenkomst is tussen geometrische en numerieke harmonieën. In zijn[19] beroemde stelling $c^2=a^2+b^2$, waarin c de lengte van lange zijde is en waarin a en b de rechthoekszijden zijn van een rechthoekige driehoek zijn, worden twee belangrijke koncepten ingevoerd: de loodrechte stand en het begrip afstand.



Figuur 1: de stelling van Pythagoras

Het diepere inzicht van deze stelling is dat er verhoudingen tussen getallen bestaan die terug te vinden zijn in de werkelijke wereld. Bovendien heeft de stelling als gevolg dat in een driehoek waar beide rechthoekszijden een lengte één hebben, de lengte van de schuine zijde gelijk is aan de wortel van twee. Dit "irrationele" getal kan niet uitgeschreven worden in komma-notatie (omdat er oneindig veel getallen na de komma zouden staan) of in breukvorm[20]. Deze lengte kan echter wel gemakkelijk meetkundig gekonstrueerd worden met een lineaal en passer, waaruit de Pythagoreërs konkludeerden dat de wortel van twee geen getal was, maar een segment. De getallenkunde wordt dus meetkunde, later zal René Descartes het omgekeerde principe gebruiken om van meetkunde getallenkunde te maken. Wiskundig maakt de stelling van Pythagoras het mogelijk om afstanden te

---

[17] Zie André Pichot “La naissance de la science, volume 1: Mésopotamie, Égypte” (Folio essais, ISBN 2-07-032603-9 en Richard J. Gillings “Mathematics in the time of the Pharaos” (Dover Publications, ISBN 0-486-24315-X)

[18] De Pythagoreeërs hadden de gewoonte om al hun meetkundige ontdekkingen aan Pythagoras zelf toe te schrijven.

[19] In India was al eerder bekend dat een driehoek waarvan de zijden zich verhouden als 3,4 en 5 een rechthoekige driehoek is. De Babyloniërs kenden de volledige stelling reeds voor Pythagoras, de Egyptenaren blijkbaar niet.

[20] Er bestaan ook irrationele getallen die niet onder wortelvorm kunnen geschreven worden, zoals bijvoorbeeld π.

berekenen in een raster, wat onmiddellijk toepasbaar was in bijvoorbeeld de bouwkunde.

De vroegere pythagoreeërs stelden ruimte gelijk met lucht (pneuma apeiron) en slechts uitzonderlijk met de leegte (kenon). De pythagoreeër **Archytas** vroeg zich af of iemand aan het einde van de wereld zijn arm kon uitstrekken of niet, dit is één van de eerste aanzetten tot het begrip abstrakte ruimte[21].

In de wiskundige wereld zijn de verhoudingen volmaakt, in tegenstelling tot wat er vastgesteld wordt in de waarneembare wereld. Deze spanning zal aanleiding geven tot het onderscheid tussen de ideeënwereld en de waarneembare wereld bij Plato. Plato heeft een geometrische voorstelling van de ruimte: de elementen zijn wiskundige figuren, centraal is er de kubus als meest stabiele vorm voor de aarde en daar rond zijn andere veelvlakken geordend.

Euklides van Alexandrië, die waarschijnlijk een platonist was, stelt in zijn "Elementen" rond 300vC axioma's op voor de gehele meetkundige kennis van de Grieken op dat moment. Honderd jaar eerder had **Hypocrates van Chios**[22] reeds zijn Elementen gepubliceerd, die de boeken I tot IV van de Elementen van Euclides zouden omvat hebben. Een axiomatiek is een systeem van uitganspunten (axioma's of postulaten) en redeneervormen om van die axioma's gevolgen af te leiden en veronderstelt overeenkomst betreffende de gebruikte termen (definities). In dertien[23] boeken presenteert Euklides 465 stellingen die volgen uit 5 axioma's, 5 gemeenplaatsen[24] en 23 definities. De eerste vier, het zevende en het negende boeken beslaan de Pythagorische leer. Het achtste boek berust op de leer van Archytas, de boeken vijf, zes en twaalf op de leer van Eudoxos en de boeken tien en dertien op de leer van Theaetetos.

EU1	Tussen elke twee verschillende punten p en q kan er een unieke rechte getrokken worden.

EU2	Voor elk segment AB en voor elk segment CD bestaat er een uniek punt E zodanig dat B tussen A en E ligt en segment CD kongruent is aan segment BE.

Een lijnstuk kan uitgebreid worden tot een oneindig lange rechte.

EU3	Voor elke twee verschillende punten O en A bestaat er een cirkel met middelpunt O en straal OA.

EU4	Alle rechten hoeken zijn kongruent.

Alle rechte hoeken zijn even recht, namelijk volmaakt recht.

EU5	Door elk gegeven punt kan er een unieke rechte getrokken worden die evenwijdig is aan een gegeven rechte[25].

[21] [COS 9]
[22] De wiskundige Hypocrates, te onderscheiden van de Hypocrates naar wie de eed van de artsen genoemd is.
[23] Er bestaan tevens boeken XIV en XV, boek XIV wordt met vrij grote zekerheid aan Hypsicles, een leerling van Euklides, toegeschreven; boek XV soms ook.
[24] "Common notions".
[25] Bovenstaande formulering is de Playfair-variant van het vijfde axioma van Euklides en is ekwivalent aan de volgende formulering door Euklides zelf: "*That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meets on that side on which are the angles less than the two angles*", zoals geciteerd in [COS 145]. De stellingen 28 tot 31 in Boek I van de Elementen (zie bijlage 2) bewijzen dat de formulering door Euklides zelf en de Play-fair variant ekwivalent zijn.

CN1	Dingen die gelijk zijn aan hetzelfde ding, zijn ook gelijk aan elkaar.

Transitiviteit van de kongruentie.

CN2	Als gelijke dingen bij gelijke dingen gevoegd worden, dan zullen de gehelen ook gelijk zijn.

x + y = x + y

CN3	Al gelijke dingen van gelijke dingen worden afgetrokken, dan zal het verschil ook gelijk zijn.

x – y = x - y

CN4	Dingen die met mekaar samenvallen, zijn gelijk aan elkaar

Kongruentie op het nivo van geometrische figuren

CN5	Het geheel is groter dan het deel

x + y > x

De Euklidische ruimte is een driedimensionele ruimte en bevat punten, rechten, vlakken, cirkels, driehoeken en andere meetkundige figuren. De ruimte is homogeen (heeft overal dezelfde eigenschappen) en isotroop (er is geen bevoorrechte richting). In de negentiende en twintigste eeuw zijn er nieuwe axiomatische uitwerkingen gepresenteerd, waarbij de nadruk enerzijds ligt op het invullen van de lacune van de ontbrekende ordeaxioma's (Hilbert, Veblen) en anderzijds op het ontbreken van een kontinuïteitsaxioma[26] (Dedekind, 1871). Hilbert zal vanaf de late negentiende en de vroege twintigste eeuw een belangrijke rol spelen in de hernieuwing van de interesse in de axiomatische methode. Hij beschrijft een programma om de konsistentie van de wiskunde te bewijzen op zuiver logische gronden. Dit onderzoek en de traditie waarin dit onderzoek past[27] leiden tot de stellingen van Kurt Gödel die stelt dat een logisch systeem dat krachtig genoeg is om de rekenkunde uit te drukken ofwel onvolledig is, ofwel inkonsistent; en dat indien het konsistent is, het haar eigen konsistentie niet kan bewijzen.

Het vijfde axioma van Euklides, dat zegt dat er in een vlak slechts één rechte door een gegeven punt gaat die evenwijdig is aan een gegeven rechte, is niet nodig in de eerste 28 stellingen uit de elementen.Er zijn verschillende vergeefse pogingen ondernomen om dit axioma te bewijzen, uitgaande van de andere axioma's, door onder meer Ptolemaus, Johann Heinrich Lambert, Adrien Marie Legendre, Girolomo Saccheri en Carl Friedrich Gauss. Later zullen er andere meetkundes ontwikkeld worden door dit axioma af te wijzen of te veranderen door Gauss, Nikolai Ivanovitch Lobachevski, Janos Bolyai en Bernhard Riemann. De Minkowskiruimte is een niet-Euklidische meetkunde, maar kan wel in pseudo-Euklidische vorm weergegeven worden.

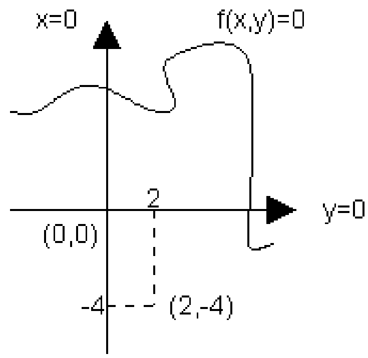
[26] Kort na het ontstaan van de Elmementen van Euklides heeft Archimedes reeds een kontinuïteitsaxioma ingevoerd.

[27] Een belangrijke kollektie van artikels door Frege, Peano, Dedekind, Burali-Forti, Cantor, Padoa, Russel, Hilbert, Zermelo, Richard, König, Whitehead, Wiener, Löwenhein, Skolem, Post, Fraenkel, Brouwer, von Neumann, Schönfinkel, Kolmogorov, Finsler, Weyl, Bernays, Ackerman, Herbrand en Gödel staat gebundeld in [FFTG] door Jean van Heijenoort.

1.3. De analytische meetkunde van René Descartes

In 1571 introduceerde **Thomas Digges** (1546?-1595) de termen “as” (”axis”) en “orthogonaal” in “A Geometricall Practise named Pantometria”.

De belangrijke bijdrage van **René Descartes** (1596-1650) tot de wiskunde en het denken over ruimte en tijd is zijn analytische geometrie die uitgaat van het inzicht dat elk punt op een vlak bepaald is door zijn afstanden tot 2 rechten die loodrecht op elkaar staan[28]. Een kurve is dan volledig bepaald door haar Cartesiaanse vergelijking f(x,y)=0.



Figuur 2: een Cartesiaans assenstelsel

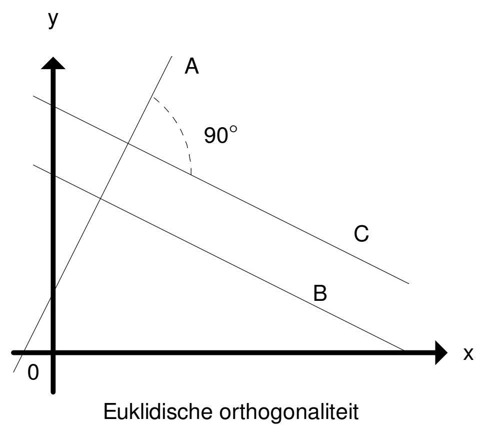
Hoewel Descartes opmerkte dat een punt in de ruimte bepaald is door drie getallen, beperkte zijn aandacht zich tot het vlak[29]. Vanaf dit moment is het mogelijk om een kurve algebraïsch in plaats van geometrisch te behandelen. In die zin is de ontdekking van Descartes een konsekwente stap na het inzicht van Pythagoras[30] dat geometrische figuren verhoudingen vertonen die als getallen kunnen uitgedrukt worden. Hiermee beschikken we over de begrippen die nodig zijn om over metriek te praten: evenveel assen als er dimensies zijn, de loodrechte stand, en de afstand. Een metriek waarin de assen loodrecht op mekaar staan wordt een orthogonale metriek genoemd.

De loodrechte stand uit de Euklidische ruimte kan worden uitgebreid tot orthogonaliteit. Dit ruimere begrip wordt meestal gedefinïeerd als een skalair in-produkt van matrices dat gelijk moet zijn aan 0 en kan worden toegepast in gelijk welke soort van “ruimtelijk” model: modellen van de ruimte, tijdruimte maar ook konfiguratieruimtes die een probleem op een abstrakte wijze weergeven. Orthogonaliteiten kunnen ook gebruikt worden om wederzijds uitsluiten toestanden uit te drukken, zoals bijvoorbeeld “rechtstaan” tegenover “neerzitten”. In het Euklidische of Cartesiaanse vlak wordt het in-produkt tussen twee vektoren **a**(x1,y1) en **b**(x2,y2) gedefinïeerd als: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = x1x2 + y1y2 = (x1\ y1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ y2 \end{bmatrix}$

[28] Descartes redeneert in zijn geometrie nog “binnen de figuur” en nog niet vanuit een externe ruimte die door het assenstelsel gekreëerd wordt. Karin Verelst heeft me hierop gewezen, zij had het op haar beurt van Bert Mosselmans.

[29] [SAHM]

[30] Bij de Grieken zijn er nauwelijks begrippen die in de richting van koördinaten gaan (enkel sferische koördinaten op Aarde en aan de hemel bij bijvoorbeeld Ptolemaios); het Egyptische hieroglief voor distrikt ("hesp") is daarentegen een rooster, een vlak rechthoekig koördinatensysteem [COS 25].



Figuur 3: A $\perp$ B, A $\perp$ C

Het is ook mogelijk om een metriek te hebben zonder dat de assen loodrecht op mekaar staan, belangrijk is het inzicht dat het aantal lijnen dat in één punt loodrecht op elkaar kunnen staan gelijk is aan het aantal dimensies en dus aan het aantal koördinaten dat er nodig is om de positie van een punt weer te geven. Bovendien kan een tweedimensionale metriek bepaald worden door bijvoorbeeld de afstand tot de oorsprong en een hoek ten opzichte van één as te geven. In plaats van door de Cartesiaanse koördinaten (x,y) wordt een punt dan bepaald door de polaire koördinaten (r,α) wat ook twee parameters zijn, evenveel als er dimensies zijn. Met deze laatste metriek is het nadeel dat de oorsprong, (0,0) in een orthogonale metriek, op oneindig veel manieren kan worden weergegeven,: $(0,\alpha)$ met $\alpha \in \mathbb{R}$ want de afstand tot de oorsprong blijft nul, welke de hoek ook is. Een orthogonale metriek waarin de afstand van de oorsprong tot de eenheidselementen op alle assen dezelfde is, wordt orthonormaal genoemd – dit wil zeggen dat een meter opzij even ver is als een meter omhoog. Aangezien de assen loodrecht op elkaar staan, kan de stelling van Pythagoras gebruikt worden om de afstand tussen twee punten (x_1,y_1) en (x_2,y_2) te bepalen: $s= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Als een meetkundige figuur verschoven of geroteerd worden, blijven de afstanden tussen de punten van de figuur dezelfde, de studie van de metriek is in grote mate een onderzoek naar welke transformaties welke effekten hebben op de afstand.

Volgens Friedrich Engels[31] maakt het invoeren van de variabelen door Descartes het mogelijk om beweging wiskundig te beschrijven en kreëert hij door dit te doen de noodzaak aan de differentiaal en integraalrekening van Leibniz en Newton. Met zijn idee van de mathesis universalis, de universele wiskunde, is Descartes ook een voorloper op de lingua characteristica universalis van Leibniz.

Descartes heeft zich afgevraagd of er een eindige hoogste snelheid bestaat, en kwam tot de konklusie dat dit niet zo was[32]. Hiermee is hij in overeenstemming met het relativiteitsprincipe en de transformaties van zijn tijdgenoot Galileo Galileï. Een belangrijk punt van verschil is dat voor Descartes de uitgebreidheid het essentiële kenmerk van de materie is, waar voor Galileï en Newton de massa het essentiële kenmerk van de materie wordt.

[31] [HMLLP 71]
[32] In een brief aan Beeckman, 22 augustus 1634 [ST&EM 5]

1.4. Het relativiteitsbeginsel van Galileo Galileï

In 1543 haalt **Nikolaas Copernikus** (1473-1543) met "De revolutionibus Orbium Caelestium" het geocentrische wereldbeeld onderuit: om de berekening van de banen van de hemellichamen te vereenvoudigen en te korrigeren laat hij de Aarde bewegen rond het centrum van het universum.

Waar bij Copernikus de Aarde nog niet om de zon draait (de zon beweegt ook rond het centrum van het universum, maar er dichter bij dan de Aarde), laat **Johannes Kepler** (1571-1630) in 1609 in “Astronomia nova” de Aarde in een elipsvormige baan rond de zon draaien[33] en geeft drie kinematische[34] beweginswetten:

Kepler 1: Elke planeet beweegt in een ellipsvormige baan met de zon in een fokuspunt van de ellips[35].

Kepler 2 (perkenwet): de fokale radius van de zon tot een planeet veegt over gelijke oppervlakken in gelijke tijd[36].

Kepler 3: Het kwadraat van de siderale perioden van de planeten is evenredig[37] tot de derde macht van hun gemiddelde afstand tot de zon[38].

Galileo Galileï (1564-1642) formuleerde het Galileïsche relativiteitsbeginsel[39] om te verklaren waarom wij niets voelen van de enorme snelheid waarmee de aarde in een baan rond de zon zou draaien. Door haar grote doorsnede en omtrek is de beweging van de aarde bijna een eenparige beweging: een verschuiving met een konstante snelheid. Dit inzicht is reeds een voorloper op het inzicht van de topologie, waarbij er vanuit gegaan wordt dat niet-Euklidische ruimten lokaal als Euklidisch mogen beschouwd worden.Als een schip op een kalme zee met een konstante snelheid voorbijvaart, kan een opvarende die op het schip biljart speelt zonder naar buiten te kijken niet weten of het schip in beweging is of niet. Als hij een voorwerp laat vallen, dan zal dit recht naar beneden vallen ten opzichte van de opvarende. Iemand die aan de kant staat en ook een voorwerp laat vallen, zal dat voorwerp ten opzichte van zichzelf ook recht naar beneden zien vallen. Maar als de waarnemer aan de kant kijkt naar het voorwerp dat op het schip valt, of als de opvarende van het schip kijkt naar het voorwerp dat aan wal valt, dan zien ze beiden een parabolische baan. Met andere woorden: op basis van mechanische experimenten kan er geen onderscheid gemaakt worden tussen rust of eenparige beweging.

---

[33] Zie Thomas Kuhn “The Copernican Revolution: Planetary astronomy in the development of Western thought” (1957)

[34] Kinematisch: de beweging wordt beschreven, zonder iets te zeggen over de oorzaak van de beweging

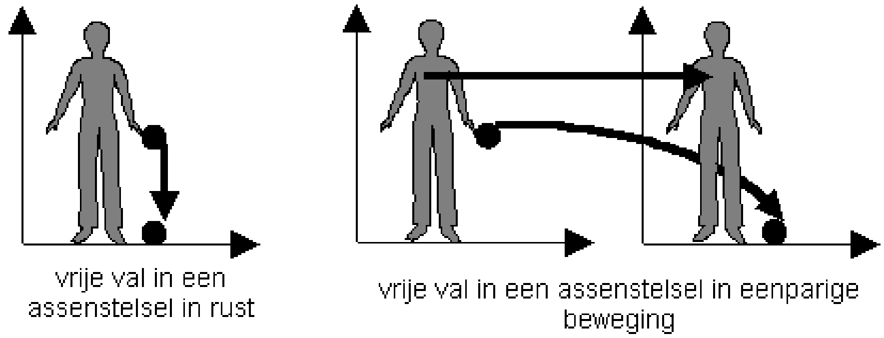
[35] Kepler, “Atronomia Nova”, 1609

[36] Idem

[37] De evenredigheidsfaktor zal een funktie van de gravitationele konstante van de Newtoniaanse mechanika zijn.

[38] Kepler, “De Harmonice Mundi”, 1619

[39] Bij Galileo Galileï was relativiteit nog geen beginsel, bij Newton is het zelfs slechts een “corollary”; het is Leibniz die relativiteit voor het eerst als een principe beschouwt. [RSR 180].



Figuur 4: Galileïsch relativiteitsbeginsel

De transformaties van Galileï om de koördinaten van één cartesiaans assenstelsel naar een ander om te rekenen zijn: in een referentiestelsel[40] dat in beweging is ten opzichte van het onze met snelheid v volgens de x-as (het is altijd mogelijk om het assenstelsel zodanig te kiezen dat de verschuiving volgens de x-as is) is de positie van een voorwerp op tijdstip t gelijk aan (x,y,z). We gaan er van uit dat bij t=t'=0 geldt dat x'=x. In ons assenstelsel t' is de positie van het voorwerp dan (x+vt,y,z).

De Galileïsche transformaties zijn:

$$x' = x-vt,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = t$$

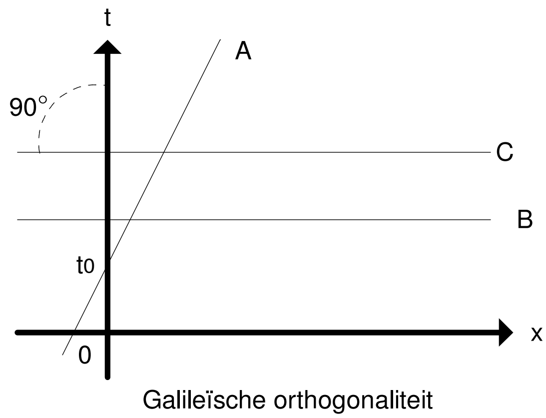
of in matrixnotatie:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Het voordeel van deze matrixrotatie is dat de vier vergelijkingen (in dit geval, voor n vergelijkingen kan een n×n matrix gebruikt worden) kunnen geschreven worden als één vergelijking met drie matrices, waarvan de middelste matrix interessant is omdat die de galileïsche transformaties samenvat.

Als ik vanop een schip dat met snelheid $\mathbf{v_1}$ voorbijvaart aan een waarnemer een voorwerp lanceer met snelheid $\mathbf{v_2}$, zal de waarnemer aan wal – volgens de theorie van Galileï – het voorwerp zien bewegen met de snelheid $\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}$. Bij Galileï kunnen snelheden gewoon worden opgeteld, er bestaat bijgevolg geen absoluut maximale snelheid. Bijgevolg kan er in principe een signaal uitgestuurd worden dat ogenblikkelijk ergens ander waargenomen wordt en is er dus absolute gelijktijdigheid.

[40] De term referentiestelsel wordt verder nog uitgewerkt, in essentie is het een oorsprong met een assenstelsel, een meetlat (of radarmethode, een misleidende naam want toen de relativiteitstheorie werd ontwikkeld bestond de radar nog niet) om afstanden te meten, een klok om de tijd te meten en een waarnemer om de meetlat en de klok af te lezen.



Figuur 5: A $\perp$ B, A $\perp$ C

Deze absolute gelijktijdigheid toont zich in het Galileïsche vlak doordat elke ruimtelijke rechte die orthogonaal staat op de tijdsas, ook orthogonaal staat op elke wereldlijn[41]. In bovenstaande tekening stelt de wereldlijn A een eenparige beweging uit in de x-richting gedurende een tijd t. De hoek $\Delta x/\Delta t$ tussen de wereldlijn A en de tijdsas is de snelheid van de beweging.

De mechanika is voor Galileï vooral een hulpmiddel om te bewijzen dat Copernikus gelijk had[42]. Galileï beperkt zijn studie opzettelijk tot de kinematika en laat de studie van de dynamika aan zijn opvolgers. Wanneer hij zich aan het einde van zijn leven toch met dynamika inlaat, blijkt zijn aanpak zeer Aristotelisch te zijn, waar hij in zijn kinematika radikaal met Aristoteles[43] gebroken had. Het zullen Newton en Leibniz zijn die de oorzaak van de beweging onderzoeken, en zo aan de oorspron van twee belangrijke stromingen in de natuurkunde staan: de vektormechanika van Newton in de Absolute Ruimte en Tijd enerzijds, en de rationele mechanika van Leibniz in een plenum waarin ruimte en tijd orderelaties zijn. Deze twee stromingen zullen dan in de relativiteitstheorieën weer geïntegreerd worden.

[41] [SNEG 42-43]
[42] [MWB]
[43] In de Dialogen wordt het Aristotelische standpund verwoord door "Simplicio"

1.5. De absolute ruimte en absolute tijd van Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727) geeft een verklaring voor de beweging die beschreven wordt door de wetten van Kepler. Waar de wetten van Kepler kinematisch zijn, zijn de wetten van Newton dynamisch[44]. Newton begrijpt beweging vanuit de begrippen impuls[45] en werkzame krachten die zich voordoen in een absolute ruimte en een absolute tijd. Deze absolute ruimte noemt Newton het "sensorium van God", hij is hierin beïnvloed door kabbalistische[46] en alchemistische[47] achtergronden. Newton beschouwde abstrakte geometrie als onmogelijk, hij beschouwde de geometrie als een deel van de mechanika. Vanuit deze realistische visie op de wiskunde zijn in een absolute ruimte de koördinaten geen “bruikbare fiktie”[48]. De "echte ruimte" van Newton zal in de negentiende eeuw aanleiding geven tot de theorieën betreffende de ether waaraan een reëel en absoluut assenstelsel kan gehangen worden.

Ook de tijd is voor Newton absoluut: “*Absolute, ware en mathematische tijd vloeit uit zichzelf en uit zijn eigen aard gelijkmatig voort zonder relatie tot iets uitwendigs.*”[49]

De bewegingswetten van Newton:

Newton 1. “*Ieder lichaam volhardt in zijn toestand van rust of eenparige rechtlijnige beweging behalve voorzover het door de werking van krachten gedwongen wordt, dien toestand te wijzigen*”[50]

een massa waarop geen kracht werkzaam is, is in rust of in eenparige beweging. Een eenparige beweging is een beweging waarvan de snelheid of de richting niet verandert: een verschuiving is een eenparige beweging, een versnelling of een rotatie niet.. Als we de snelheid door een vektor $\mathbf{v}(v_x,v_y,v_z)$ voorstellen, wordt een verandering van richting ook als een verandering van snelheid begrepen. Deze wet kan wiskundig worden uitgedrukt door te zeggen dat de impuls $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ konstant is. De impuls is de massa m vermenigvuldigd met de snelheid $\mathbf{v}$. Vektoren zijn zeer belangrijk in de mechanika van Newton. Door te schrijven $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ wordt in één formule een stelsel van 3 vergelijkingen gevat: $p_x=mv_x$, $p_y=mv_y$ en $p_z=mv_z$.

Newton 2. “*De verandering (mutatio) van den motus (d.w.z. van de Quantitas Motus of impuls) is evenredig met de werkende vis motrix en heeft plaats langs de rechte lijn, welke volgens die kracht werkt*”[51]

Onder wiskundige vorm[52] wordt deze wet geschreven als $d\mathbf{p}/dt = d(m\mathbf{v})/dt = \mathbf{F}$.

44 [M&M 105]
45 De massa vermenigvuldigd met de snelheid, in het Engels "momentum".
46 "God is overal", zonder dat dit tot pantheïsme hoeft te leiden
47 [NTA] gaat helemaal hierover
48 [COS 101]
49 Isaac Newton, “Principia” (1687), geciteerd in [WIT 86]
50 [MWB IV,295]
51 [MWB IV,301]
52 De term “wiskundig” is hier niet helemaal op zijn plaats omdat het gelijkheidsteken niet voor de wiskundige gelijkheid staat: de verandering van de snelheid **v** wordt veroorzaakt door de kracht **F** en niet andersom. Deze gelijkheidsrelatie is dus niet symmetrisch. Ik dank dit inzicht aan wijlen prof. Roger van Geen. Vergelijk dit ook met de “assignment” (toekenning) operator in verschillende programmeertalen (bijvoorbeeld “:=” in Pascal of “=” in C) tegenover de “test” operator (“=” in Pascal, “==” in C).

Het is bij deze wet dat de differentiaal- en integraalrekening van Newton belangrijk wordt: een snelheid $\mathbf{v}=d\mathbf{l}/dt$ is de eerste afgeleide van de ruimtelijke verplaatsing $\mathbf{l}$ naar de tijd, een versnelling $\mathbf{a}=d\mathbf{v}/dt$ is de tweede afgeleide van de ruimtelijke verplaatsing naar de tijd. Bij konstante massa m krijgen we de vorm $\mathbf{a}=\mathbf{F}/m$ waaronder de derde wet van Newton meestal voorgesteld wordt. De kracht **F** is de oorzaak van de verandering van snelheid, bij een eenparige beweging zoals gedefinïeerd in de eerste wet van Newton is $\mathbf{a}=0$. De massa m is een maat voor de weerstand van de materie tegen een verandering van snelheid, een massa die dubbel zo zwaar is als een andere zal de dubbele kracht nodig hebben om dezelfde versnelling te ondergaan..

inertiële massa = passieve gravitationele massa = aktieve gravitationele massa

Newton 3. aktie is gelijk aan reaktie

Deze wet brengt een oplossing voor het probleem dat de bewegingswet opgaat voor één punt met een massa, maar dat er in de werkelijkheid zich komplexe problemen voordoen en dat de werkzame krachten niet altijd gekend zijn. De wet van aktie en reaktie staat toe om ongekende krachten in vaste lichamen te elimineren. Een algemenere oplossing van dit probleem zal in de rationele mechanika, waarvan Leibniz aan de oorsprong ligt, gevonden worden.

De parallellogramwet voor de optelling van vektoren wordt soms als de vierde wet van Newton beschouwd. Newton volgt hier enerzijds Galileo Galileï die ontdekt had dat snelheden zich als vektoren optellen; anderzijs heeft Newton vektoren nodig om de werking op afstand voor te stellen. Het is deze werking op afstand (die voor Newton aanvaardbaar was vanuit een alchemistisch perspektief) waarop de grootste kritiek zal komen, in eerste instantie van Leibniz.

Newton poneerde, in tegenstelling tot de golftheorie van zijn tijdgenoot Christiaan Huygens[53], een korpuskulaire theorie van het licht in zijn "Opticks". Het is pas wanneer Thomas Young in 1801 de interferentie van licht ontdekt dat licht weer als een golf zal worden beschouwd, nog later zal Albert Einstein met zijn fotonentheorie teruggrijpen naar de korpuskulaire theorie. In de kwantumfysika zal licht als zowel golf als deeltje beschouwd worden en zal ook de materie een golfkarakter blijken te hebben.

[53] Huygens in de uitvinder van de penduleklok. Hij geloofde, net als Leibniz, niet in absolute ruimte of tijd.

1.6. Ruimte en tijd als orderelaties bij Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz[54] (1645-1716) verwerpt de absolute ruimte en de absolute tijd van Newton: "*To summarize my point* […] *since space without matter is something imaginary, motion, in all mathematical rigor, is nothing but a change in the positions* [situs] *of bodies with respect to one another, and so, motion is not something absolute, but consists in a relation.*"[55]

Hij stelt dat gebeurtenissen fundamenteler zijn dan momenten en dat ruimte en tijd niet meer zijn dan orderelaties tussen gebeurtenissen, dit wordt de relatietheorie. De relatieve ruimte en tijd van Leibniz mag echter niet verward worden met de relativistische tijdruimte en de relatietheorie valt te onderscheiden van de relativiteitstheorie: "*Leibniz advocated a theory of space (and time) as 'relative' – that is, as relative to the things ordinarily said to be located within space (or time). He opposed the doctrine of Newton's Principia which cast space and time in the role of containers existing in their own right, and having a make-up that is altogether indifferent to the things emplaced in them. Owing to the general tenor of this theory Leibniz is sometimes seen as a precursor of Einstein and modern relativity theory. But this view is mistaken or, at any rate, misleading. For Leibniz – unlike Einstein and modern relativists – is not thinking of the relativity of dynamical principles to the choice of a coordinate system within nature, so that we compare the situation from the perspective of various world-included coordinate-frameworks. Rather, Leibniz's thesis that 'space is relative to the things in it' relates to the perspective of various alternative possible worlds taken as a whole.*"[56]

Met zijn ontdekking[57] van de integraal- en differentiaalrekening en zijn visie op de ruimte als een plenum ligt Leibniz aan de basis van de rationele mechanika[58], zoals verder uitgewerkt door onder meer D'Alembert (1717-1785), Maupertuis (1698-1759), Euler(1707-1783), Lagrange (1736-1813), William Rowan Hamilton (1805-1865), Jacobi (1804-1851), Gauss (1777-1855) en Jules Henri Poincaré :"*Leibniz' space is a space of real points (i.e., monads) without real lines, planes or solids; it is a space where one can tell – if one is God – whether two monad-points are close together (for then their points of view will be similar), and yet it is meaningless to ask for the distance between them, for distance, being a relation, has no place in the monadic realm. Such a world must have seemed weird a century ago, but these spaces, termed topological spaces, are the common familiar property of mathematicians today. Topology is a branch of mathematics that has received much attention of late. In the last century* [=19e eeuw] *it was called analysis situs*[59]*; fittingly enough, its founder was Leibniz*"[60].

In de rationele mechanika wordt de ruimte niet als een Euklidische ruimte begrepen maar als een konfiguratieruimte waarvan de struktuur een hogere orde weerspiegeld. De Cartesiaanse koördinaten worden vervangen door veralgemeende koördinaten, waarbij het aantal koördinaten gelijk is aan het aantal vrijheidsgraden van het te beschrijven systeem. Op die manier is het

[54] Orthografische mnemoniek: "over Leibniz, Lenz, Hertz, Lorentz, Schutz en FitzGerald; maar niet over de wet van Lorentz en Lorenz."
[55] "On Copernicanism and the Relativity of Motion," G. W. Leibniz
[56] [RL2 84]
[57] Onafhankelijk van Newton. De kettingregel voor partiële afgeleiden wordt de regel van Leibniz genoemd.
[58] Hiermee wordt de traditie die in het Frans "méchanique rationelle" en in het Engels "analytical mechanics" genoemd wordt bedoeld. Ik verkies de term "rationele mechanika" omdat "analytisch" in deze kontekst vaak verkeerd begrepen wordt: "analyse" is hier de toepassing van de principes van de infinetesimaalrekening op problemen uit de zuivere en toegepaste wiskunde. Cf. [VPM 5]
[59] Onder meer door Jules Henri Poincaré in 1895
[60] [RL2 92-93]

mogelijk om een fysisch systeem te beschrijven als één punt in een veel-dimensionele ruimte[61]. Verandering en krachten kunnen dan worden verklaard vanuit een enkele wet van de minste weerstand[62]: een punt legt die baan af die haar in de konfiguratieruimte het minste weerstand kost. Deze weerstand is als een skalair weer te geven voor ieder punt, de funktie die deze skalairen voor ieder punt bepaalt is de werkfunktie. Om dit mogelijk te maken voert Leibniz de vis viva in, die overeenkomt[63] met de kinetische energie. In tegenstelling tot Newton moet Leibniz geen werking op afstand verklaren en heeft dan ook geen nood aan vektoren. Het is deze abstrakte ruimte die bij Einstein in de algemene relativiteitstheorie een reële en objektieve status zal krijgen en in die zin kan de algemene relativiteitstheorie als de vereniging van de Newtoniaanse en Leibniziaanse natuurkunde beschouwd worden[64].

Leibniz is ook een grondlegger van de formele logika: zijn lingua characteristica universalis moet het op basis van de grammatika van een uitspraak mogelijk maken om de waarheid van die uitspraak te bepalen. De basisbegrippen van deze taal zijn de eenvoudigste begrippen die elk een eigen teken krijgen[65]. Hierin was Leibniz geïnspireerd door natuurlijke talen, maar vanaf 1676 werkt hij aan een algebra van gedachten, de calculus ratiocinator, die deel moet uitmaken van de lingua characteristica universalis. Dit idee zal in de negentiende eeuw worden uitgewerk door Boole, de Morgan en Frege en in de twintigste eeuw door Peano, Russel, Whitehead, Hilbert en Gödel. Leibniz formuleert een principe van identiteit (twee dingen zijn identiek als al hun eigenschappen dezelfde zijn[66]), hetwelk een formulering in tweede orde predikatenlogika blijkt te zijn, wat als een voorbode van de fundamentele problemen die Kurt Gödel zal blootleggen zou kunnen beschouwd worden.

[61] [VPM 13]

[62] De wet van de minste weerstand of het kleinste werk wordt tegenwoordig toegeschreven aan Euler [TIDE 59], het is verder uitgewerkt door Lagrange en Hamilton. Euler, die als eerste de korrekte wiskundige beschrijving van dit principe formuleerde, schreef het zelf toe aan Pierre de Maupertuis (1698-1759). Koenig beweerde een brief van Leibniz te bezitten waarin Leibniz het principe beschreef [VPM 345-346].

[63] op een faktor 2 na

[64] Hierover hebben Karin Verelst en ik in 1993 een taak geschreven voor het vak analytische mechanika van prof. J. Reignier. Zie ook Karin Verelst & Bob Coecke "Early Greek thought and perspectives for the interpretation of quantum mechanics: preliminaries to an ontological approach" (1999), [MS 163-196].

[65] zoals bijvoorbeeld in de Chinese ideografie, maar dit was ook in gebruik onder alchemisten

[66] In hedendaagse notatie: $A = B \Leftrightarrow \forall P:(P(A) \Leftrightarrow P(B))$ met als gevolg "er bestaan geen twee identieke stoelen, want dan zou ik ze op dezelfde plaats kunnen zetten".

1.7. Immanuel Kant

Aanvankelijk tracht **Immanuel Kant** (1724-1804) tot een synthese van de opvattingen van Newton en Leibniz te komen: "*Now I begin to see that I lack something in the expression of motion and rest. I should never say, a body is at rest, without adding with regard to what it is at rest, and never say that it moves without at the same time naming the objects with regard to which it changes its relation. If I wish to imagine also a mathematical space free from all creatures as a receptacle of bodies, this would still not help me. For by what should I distinguish the parts of the same and the different places, which are occupied by nothing corporeal?*"[67]

Later, waarschijnlijk onder invloed van Euler, kiest Kant voor de absolute ruimte en tijd van Newton. Kant baseert zijn bewijsvoering voor het bestaan van een absolute ruimte op het onderscheid tussen links en rechts: hoewel de onderdelen van een linker- en rechterhand dezelfde zijn, kunnen ze niet onderling verwisseld worden. De wetten van de natuurkunde werden beschouwd als invariant ten opzichte van linksdraaiende en rechtsdraaiende assenstelsels. **Hermann Weyl** zal dit argument later ontkrachten door te tonen dat links en rechts wel verwisselbaar zijn door een rotatie in een vierdimensionale ruimte: "*Kant finds the clue to the riddle of left and right in transcendental idealism. The mathematician sees behind it the combinatorial fact of the distinction of even and odd permutations. The clash between the philosophers and the mathematicians quest for the roots of the phenomena which the world presents to us can hardly be illustrated more strikingly.*"[68]

Volgens Kant is het onderscheid tussen links en rechts een onmiddellijke intuïtie ("anschauenden Urteilen") en dus niet in de eerste plaats een fysisch probleem maar één van de transcendale filosofie. Onze kennis van een objekt samengesteld uit de "gewaarwording" ten gevolge van het ding-op-zichzelf en de "vorm" die een a priori element is van onze waarneming die orde brengt in de gewaarwordingen. Ruimte en tijd zijn pure intuïties ("reine Anschauung") en de voorwaarden die het waarnemen mogelijk maken: "*The possibility of apodeictic principles concerning the relations of time, or of axioms of time in general, is also grounded upon this a priori necessity [of time as part of the framework of sensory experience]. [Examples of such apodeictic principles are:] Time has only one dimension; different times are not simultaneous but successive...*"[69] Geometrische Euklidische stellingen zijn dus a priori synthetische oordelen zonder tautologieën te zijn. **Hermann von Helmholtz** (1821-1894) verwerpt deze redenering van Kant dat de Euklidische ruimte een a priori natuur heeft: indien de ruimte een pure intuïtie is, dan leidt die tot niet meer dan de vaststelling dat de wereld uitgebreidheid heeft en hoeft dit niet tot de axioma's van Euklides te leiden.

[67] Immanuel Kant, "Neuer Lehrbegriff der Bewegung und Ruhe", geciteerd in [COS 132]
[68] Hermann Weyk, "Philosophy of mathematics and natural science", geciteerd in [COS 133]
[69] [TL 1]

1.8. De wetten van Maxwell voor het elektromagnetisme

De aanleiding voor het in vraag stellen van de Newtoniaanse mechanika waren verschillende gevolgen van de studie van het elektromagnetisme. Elektriciteit en magnetisme waren reeds bekend van in de oudheid. **Benjamin Franklin** (1706-1790) formuleerde de wet van het behoud van elektrische lading en introduceerde de notie van positieve en negatieve ladingen die hij als een overschot van of tekort aan "elektrische vloeistof" beschouwde[70]. **Charles Augustin de Coulomb** (1736-1806) ontdekte dat elektrische ladingen een kracht op elkaar uitoefenen. **Hans Christian Oersted** (1777-1851) observeerde dat een kompasnaald beïnvloed wordt door een elektrische stroom, en ontdekte zo dat elektrische en magnetische verschijnselen met mekaar verbonden zijn. **Michael Faraday** introduceerde het begrip "veld". Verder werk door onder meer Carl Friedrich Gauss, Jean Baptiste Biot en Félix Savart beschreven de elektrische en magnetische ladingen, stromen, krachten en velden.

James Clerk Maxwell (1831-1879) probeerde de elektrische en magnetische velden te begrijpen op basis van komplexe mechanische modellen waarbij de ruimte gevuld wordt door een elastische ether. Tenslotte verliet Maxwell deze benadering en behandelde elektrische en magnetische velden als fysische entiteiten die geen onderliggend medium nodig hebben om te bestaan[71]. In 1873 publiceerde hij zijn "Treatise on Electricity and Magnetism" waarin de theorie voor het elektromagnetisme tot vier wetten herleid wordt.

De lokale en de globale vormen van de vier wetten van Maxwell worden hieronder gegeven[72]. De lokale wetten staan toe om de velden in een punt van de ruimte te bepalen. In de globale vormen staan integralen, deze kunnen als limieten van sommaties beschouwd worden.

Maxwell 1. $\mathrm{div}\,\mathbf{E} \equiv \nabla . \,\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ of $\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = q/\varepsilon_0$

De <u>wet van Gauss voor elektriciteit</u> is gebaseerd op de wet van Coulomb die de aantrekkings- en afstotingskrachten tussen onbewegelijke ladingen beschrijft. Elektrische ladingen q met ladingsdichtheid ρ veroorzaken een elektrisch veld **E.**

Maxwell 2. $\mathrm{div}\,\mathbf{B} \equiv \nabla . \,\mathbf{B} = 0$ of $\oiint \mathbf{B}.d\mathbf{S} = 0$

De <u>wet van Gauss voor magnetisme</u> ontkent het bestaan van magnetische ladingen (monopolen), wiskundig wordt dat uitgedrukt door te zeggen dat het magnetisch veld **B** geen (nul) divergentie heeft.

Maxwell 3. $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} \equiv \nabla \times \mathbf{E} = -\,\partial \mathbf{B}/\partial t$ of $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -d\mathbf{\Phi_B}/dt$

De <u>wet van Faraday-Lenz</u> beschrijft de induktie van een elektrisch veld door een veranderend magnetisch veld **B** met een magnetische flux $\mathbf{\Phi_B}$.

Maxwell 4. $\mathbf{rot}\,\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ of $\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = \mu_0\,\mathbf{I} + \mu_0\varepsilon_0\, d\mathbf{\Phi_E}/dt$

De <u>wet van Maxwell-Ampère</u> is gebaseerd op de wet van magnetische velden tussen bewegende ladingen en omvat de induktie van een magnetisch veld **B** door een veranderend elektrisch veld **E** met een elektrische flux $\mathbf{\Phi_E}$.

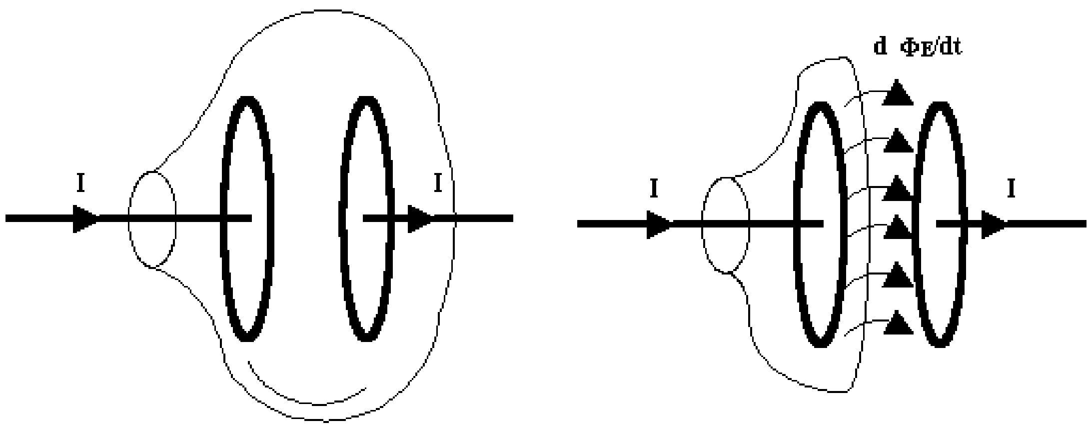
---

[70] [OH 533]

[71] [OH 778]

[72] In deze formules is ε_0 de permitiviteitskonstante van het vacuum $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/(N.m^2)$ en is μ_0 de permeabiliteitskonstante van het vacuum met als waarde $\mu_0 \equiv 4\pi$. De naam en de waarden van deze konstanten zijn niet zo belangrijk, zoals meestal mogen konstanten in redeneringen genegeerd worden.

De termen $\mu_0\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ in de lokale vorm en $\mu_0\varepsilon_0\, d\mathbf{\Phi_E}/dt$ in de globale vorm beschrijven de "displacement current". Deze displacement current was het meest kontroversiële gedeelte van de theorie van Maxwell omdat het gebaseerd was op een gedachtenexperiment om zijn synthese van de verschillende wetten te doen kloppen. De wet van Ampère rot $\mathbf{B} \equiv \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\, \mathbf{j}$ of $\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = \mu_0\, \mathbf{I}$ stelt dat de integraal van het magnetisch veld **B** rond een gesloten pad gerelateerd is aan de stroom **I** met stroomdichtheid **j** die door een willekeurig (denkbeeldig) zakvormig oppervlak dat op dat pad opgespannen is loopt. Voor een gelijkmatige en ononderbroken stroom door een geleider is er geen probleem. Indien er echter een kondensator in een circuit zit, kan men zowel een oppervlak opspannen dat beide platen van de kondensator omvat als één dat slechts één van de platen omvat, wat een verschillend resultaat oplevert voor **I** aangezien er in het tweede geval geen stroom door het oppervlak gaat en in het eerste geval wel.



Figuur 6: De integraal $\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l}$ is de som van de vektoren van het magnetisch veld **B** die zich op de opening van de denkbeeldige ballonnen op de tekening bevinden. Deze som moet gelijk zijn (op de konstante faktor μ_0 na) aan de stroom **I** die aan de rechterkant de ballon doorprikt. In de tweede tekening is de ballon zodanig opgespannen dat hij niet doorprikt wordt en er geen stroom I doorloopt. Deze stroom wordt echter vervangen door de verplaatsingsstroom $\mu_0\varepsilon_0\, d\mathbf{\Phi_E}/dt$.

De wet van Ampère gaat ook niet op voor stromen die veranderen. Na verdere uitwerking [OH 778-783] van dit gedachtenexperiment voegt Maxwell de displacement current toe met daarin de elektrische flux $\mathbf{\Phi_E}$. Het is op basis van deze term dat Maxwell in 1864 voorspelde dat er elektromagnetische golven bestaan die zich voortplanten met de lichtsnelheid, wat in 1888 door **Heinrich Rudolf Hertz** (1857-1894) aangetoond werd. Maxwell veronderstelde ook al dat licht een elektromagnetische golf is.

Samen met de Lorentzkracht $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ geven de Maxwellvergelijkingen een volledige beschrijving van de interakties tussen ladingen, stromen, elektrische velden en magnetische velden. Indien de lading q niet in beweging is, dan is $\mathbf{v}=(0,0,0)$ en is er enkel de kracht die veroorzaakt wordt door het elektrisch veld **E**. Aangezien $d\mathbf{p}/dt=\mathbf{F}$ zegt dat een verandering in snelheid en richting door kracht veroorzaakt wordt, en $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ zegt dat een kracht wordt veroorzaakt door velden, is er met deze nieuwe theorie een oplossing voor Newton's probleem van werking op afstand. Elektromagnetische golven planten zich voort met lichtsnelheid, en een uitgangspunt van de speciale relativiteitstheorie zal zijn dat kausaliteit zich met maximaal de lichtsnelheid voortplant.

De wetten van Faraday-Lenz en Maxwell-Ampère beschrijven de relatie tussen elektrische en magnetische velden. Elektische ladingen geven aanleiding tot het elektrisch veld. Het magnetisch veld wordt geïnduceerd door veranderingen v/h elektrisch veld (bv. in een elektromotor) en omgekeerd zal een magnetisch veld ladingen in beweging brengen (bv. in een dynamo). Stilstaande elektrische ladingen veroorzaken enkel een elektrisch veld, bewegende ladingen veroorzaken zowel een elektrisch als magnetisch veld. Magnetisme is een relativistisch effekt van elektriciteit, het treedt enkel op in referentiestelsels die in beweging zijn ten opzichte van de lading.

"*Electric and magnetic forces and fields transform into one another if we change the frame of reference. In the rest frame of a charged particle, only electric forces act on the particle. Here we can regard the magnetic forces that act on the particle in any other reference frame as resulting from a transformation of the electric forces in the rest frame. In this sense, magnetic forces can be regarded as a consequence of electric forces and of relativity.*"[73]

Het is de studie van hoe elektomagnetische velden zich verhouden ten opzichte van referentiestelsels die zal leiden tot de speciale relativiteitstheorie.

"*Absolute space is conceived as remaining always similar to itself and immovable. The arrangement of the parts of space can no more be altered than the order of the portions of time. To conceive them to move from their places is to conceive a place to move from itself. But as there is nothing to distinguish one portions of time from another except the different events wich occur in them, so there is nothing to distinguish one part of space from another except its relation to the place of material bodies. We cannot describe the time of an event except by reference to some other event, or the place of a body except by reference to some other body. All our knowledge, both of time and space, is essentially relative.*"[74]

In 1885 stelt **Ludwig Lange** (1863-1938) voor om het begrip "absolute ruimte" te vervangen door "inertïeel systeem": het is steeds mogelijk om een referentiesysteem zo te bewegen dat een willekeurig bewegend punt ten opzichte van dat referentiesysteem eenparig beweegt. In een driedimensionele ruimte kan men zo drie willekeurig bewegende punten vanuit eenzelfde oorsprong volgens drie rechten ten opzichte van het referentiestelsel laten bewegen. Zo een referentiestelsel is een inertïeel systeem: elke vierde puntmassa waarop geen krachten werkzaam zijn zal in zo een stelsel ook volgens een rechte lijn bewegen.

Hoewel Maxwell in zijn wetten het niet heeft over de ether, werd er nog steeds van uit gegaan dat er een medium bestaat waardoor de elektromagnetische golven die Hertz ontdekte, waaronder het licht zelf, zich voortbewegen. Als de absolute ruimte niet waargenomen kon worden door middel van mechanische eksperimenten, was het misschien wel mogelijk om dit te doen via elektomagnetische experimenten. Indien de ether in absolute rust zou verkeren, zou het een kandidaat zijn voor de absolute ruimte van Newton, het referentiestelsel van deze ether zou dan een bevoorrecht referentiestelsel zijn.

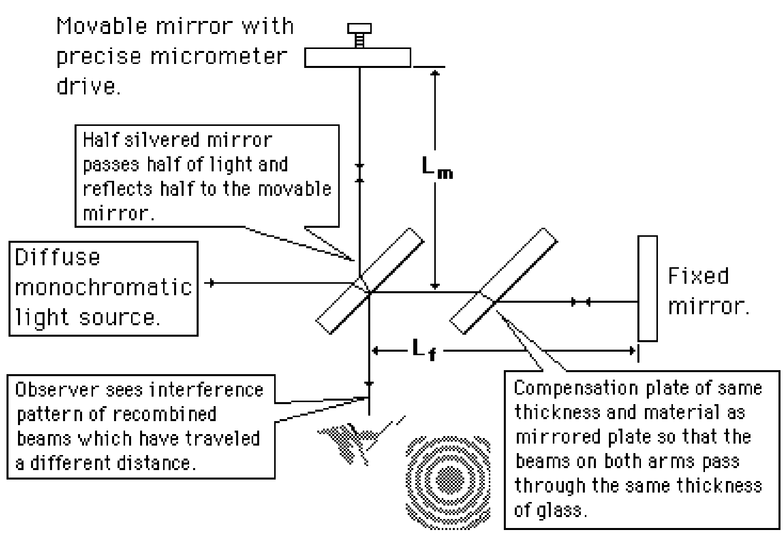
Niet alle wetenschappers in de negentiende eeuw waren overtuigd van het bestaan van de ether. **Michael Faraday** besefte in 1846 dat zijn velden een alternatief voor de ether vormden: “*The view which I am so bold as to put forth considers, therefore, radiation as a high species of vibration in the lines of force which are known to connect particles and also masses together. It endeavours to dismiss the æther, but not the vibration. The kind of vibration which, I believe, can alone account for the wonderful, varied, and beautiful phænomena of polarization, is not the same as that which occurs on the surfaces of disturbed water, or the waves of sound in gases or liquids, for the*

[73] [OH 684]
[74] [M&M 12], zie ook [COS 140]

vibrations in these cases are direct, or to and from the center of action, whereas the latter are lateral. It seems to me, that the resultant of two or more lines of force is in an apt condition for that action which may be considered as equivalent to a lateral vibration; whereas a uniform medium, like the æther, does not appear apt, or more apt than air or water."[75] Merk op dat de uitdrukking "*lines of force*" typisch Newtoniaans taalgebruik is (zie de tweede bewegingswet van Newton). **William K. Clifford** stelt het in 1879 nog kernachtiger en past "het scheermes van Ockham"[76] toe op de ether: "*In order to explain the phenemena of light, it is not necessary to asume anything more than a periodical oscillation between two states at any given point of space*"[77]

Albert Abraham Michelson (1852-1931) bestudeerde de snelheid van het licht, in 1878 bepaalde hij die op 299853 km/s. In 1883 herhaalde hij het experiment van Léon Foucault uit 1850 waaruit bleek dat licht zich trager voorplant in water dan in lucht. Michelson bepaalde ook de verhouding van de snelheden: c_{lucht}/c_{water}=1.33, dit is hetzelfde resultaat als de brekingsindex van een lichtstraal die gebroken wordt van de overgang van lucht naar water en die gedefinïeerd wordt als sinus(invalshoek)/sinus(brekingshoek). De snelheid van het licht is dus afhankelijk van het medium.Indien het licht ook over een medium in het vacuum beschikt, de ether, dan moet het mogelijk zijn om de beweging van de Aarde ten opzichte van die ether te meten.

In 1881 en later opnieuw in 1887 met de scheikundige **Edward W. Morley**, probeerde Michelson de beweging van de Aarde ten opzichte van de elektromagnetische ether te meten. Het idee was dat een lichtstraal die verstuurd werd in de richting waarin de Aarde beweegt en dan teruggekaatst wordt, niet evenlang doet als een lichtstraal die dezelfde afstand aflegt maar dan in een richting die loodrecht staat op die van de beweging van de Aarde. Omdat licht te snel gaat en de tijd die een lichtstraal nodig heeft om een korte afstand af te leggen niet rechtstreeks gemeten kon worden, bouwde Michelson een interferometer waarop de interferentie van de twee lichtstralen gezien kon worden.



figuur 7 door C.R.Nave[78]

[75] Michael Faraday, "Thoughts on Ray-vibrations", Philosophical Magazine, Series 3, Vol.28, Nr.188 (1846)
[76] Het principe van William van Ockham (Occam, ca. 1285-2348) om geen nodeloze veronderstellingen maken: "Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem"
[77] William Kingdon Clifford, "Lectures and Essays", Volume I, Macmillan, London (1879), p. 85
[78] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/michel.html

Michelson en Morley waren echter niet in staat om de snelheid van de ether, waarvan werd verondersteld dat ze in absolute rust was, te meten hoewel hun apparatuur daar gevoelig genoeg voor was.

1.9. De richting van de tijd

De wetten van Newton en Maxwell zijn zowel geldig indien de tijd van het heden naar de toekomst loopt als indien de tijd van de toekomst naar het verleden loopt, dit zal ook gelden voor de relativiteitstheorie in haar klassieke formulering. Het grootste deel van de natuurkunde is volstrekt onverschillig ten opzichte van de richting van de tijd zoals wij die ervaren: van het verleden over het heden naar de toekomst. Om in de natuurkunde de richting van de tijd te formuleren, moeten we ons wenden tot de tweede wet van de thermodynamika.

De eerste wet van de thermodynamika, behoud van energie, werd door **Sadi Carnot** (1796-1832) geformuleerd:

> **Thermodynamika 1:** "*Whenever we employ some process involving heat and work to change a system from an initial state characterized by certain values of the macroscopic parameters to a final state characterized by new values of the macroscopic parameters, the change in the internal energy of the system* $\Delta E = \Delta Q \Delta W$ *has a fixed value which does not depend on the details of the process.*"[79]

De tweede wet van de thermodynamika bestaat in verschillende vormen die gelijkwaardig zijn.

De formulering van de tweede wet door **Kelvin** en **Planck** sluit het perpetuum mobile uit, omdat er steeds energie onder de vorm van warmte verloren gaat:

> **Thermodynamika 2a:** "*An engine operating in a cycle cannot transform heat into work without some other effect on its environment.*"[80]

formulering van de tweede wet door **Rudolph Clausius** (1822-1888), die een veralgemening maak van het werk van Maxwell, Bernoulli, Herepath, Waterston, Joule en Krönig.:

> **Thermodynamika 2b:** "*An engine operating in a cycle cannot transfer heat from a cold reservoir to a hot reservoir without some other effect on its environment.*"[81]

Er bestaan verschillende kwaliteiten van energie. Warmte is de laagste kwaliteit en kan nooit in haar totaliteit omgezet worden in een energie van hoger kwaliteit (bijvoorbeeld bewegingsenergie, potentiële energie of licht).

Dit is een van de weinige wetten uit de natuurkunde die niet omkeerbaar zijn in de tijd:

gedurende ieder fysisch proces neemt de entropie $S(A) = \int_{Ao}^{A} dQ/T + S(A_0)$ steeds toe.

(Q is hitte, T is temperatuur,en A_0 is een vast referentiepunt) "De entropie van de eindtoestand van een energetisch geïsoleerd systeem dat een transitie ondergaat, is nooit lager dan de entropie van de initiële toestand". Entropie is een maat voor wanorde. Lokaal kan de entropie afnemen, bijvoorbeeld in een levend wezen, maar globaal niet: een levend wezen verbruikt veel energie, zeker als het warmbloedig is.

[79] [OH 510]
[80] [OH 520]
[81] [OH 521]

De derde wet van de thermodynamika, van **Walther Hermann Nernst** (1864-1941), stelt dat bij het absolute nulpunt de entropie nul is:

Thermodynamika 3: "*The entropy of a system at absolute zero is a universal constant (independent of all the macroscopic parameters describing the system) which may be set equal to zero.*"[82]

De thermodynamika is een statistische mechanika[83] en de uitwerking van het thermodynamische probleem van "de demon van Maxwell"[84] zal via het werk van Boltzmann en Max Planck aanleiding geven tot een nog radikalere probabilistische mechanika: de kwantumfysika.

In de ordinale benadering van de tijdruimte zal de richting van de tijd echter automatisch volgen uit de orderelatie en zal het niet nodig zijn om hiervoor een beroep doen op de thermodynamika.

[82] [OH 524]

[83] zie Lawlence Sklar, "Physics and chance, philosophical issues in the foundations of statistical mechanics", Cambridge University Press (1993), ISBN 0-521-55881-6

[84] een gedachtenexperiment waarbij een denkbeeldige duivel tussen twee vaten molukulen al dan niet doorlaat op basis van hun energie – zo zou de duivel de molekulen kunnen sorteren op een manier dat de molekulen met veel energie in het ene vat zitten en die met lage energie in het andere vat zitten, wat een inbreuk op de tweede wet van de thermodynamika zou zijn

1.10. Tijdruimte

Ptolemaios van Alexandrië (85-160) "bewees" dat er drie dimensies zijn. In 1553 vond Michael Stifel het nodig op te merken dat meer dan drie dimensies tegennatuurlijk zouden zijn.

De ontdekking van de hoger dimensionale-wiskunde is een gevolg van het falen van het bewijzen van het vijfde postulaat van Euklides. **Girolamo Saccheri** (1667-1733) trachtte het vijfde postulaat te bewijzen door middel van een redenering ad absurdum. Hij nam het tegendeel van het vijfde postulaat in plaats van het vijfde postulaat aan en trachtte zo een kontradiktie te vinden. Hij vond een stelling die "strijdig was met de aard van een rechte lijn", wat hij als bewijs voor het vijfde postulaat aanvaarde, maar eigenlijk had hij de hyperbolische meetkunde geanticipeerd. Dergelijke bewijzen zijn ook gekonstrueerd door **J.H. Lambert** en **Adrien-Marie Legendre**.

De niet-euklidische meetkunde werd uitgewerkt door onder meer **Carl Friedrich Gauss**, **János Bolyai**, **Nikolaj Lobatsjevski**, **Bernhard Riemann**, en **Felix Klein**. De meetkundes kunnen in drie groepen geklassificeerd worden, op basis van hoe de evenwijdigheid er uit ziet.

Het was niet evident dat indien er een vierde dimensie zou zijn, dit de tijdsdimensie zou zijn. Er werd ook gedacht aan een vierde ruimtelijke dimensie, bijvoorbeeld door Simon Newcomb. Ook andere grootheden kunnen als een dimensie worden uitgezet, wat bijvoorbeeld zal gebeuren in oneindig-dimensionale Hilbertruimten of in vijf-dimensionale theorieën zoals die van Gunnar Nordstrom, Oscar Klein en Theodor Kaluza.

Indien de tijd de vierde dimensie is, dan krijgt de tijdruimte plots een heel ander karakter dan de Euklidische ruimte: waar de Euklidische ruimte ofwel statisch is in de tijd ofwel momentaan, is de tijdruimte dynamisch, ten minste vanuit een menselijk standpunt. Een waarnemer met vierdimensionele zintuigen[85] zou alles tegelijkertijd zien gebeuren, deze voorstelling wordt het "blok-universum" genoemd.

De oudste bekende referentie naar ruimte en tijd als één vierdimensioneel geheel gaat terug tot **Jean D'Alembert** die het in 1754 in het artikel "Dimension" zeer voorzichtig invoerde: "*As I've already said, it is not possible to conceive of more than three dimensions. However, a brilliant wit with who I am acquainted considers duration a fourth dimension, and that the product of time multiplied with a solidity would, in some sense, be a product of four dimensions. This idea is perhaps contestable, but it appears to me to be of some merit, even if it is only that of novelty.*"[86]

Lagrange werkt tussen 1788 en 1797 de vierdimensionele mechanika uit: "*Nous allons employer la théorie des fonctions dans la Méchanique. Ici les fonctions se rapportent essentiellement au temps, que nous désignerons toujours par t, et, comme la position d'un point dans l'espace dépend de trois coordonées rectangulaires x, y, z, ces coordonnées, dans les problémes de Méchanique, seront cencées être des fonctions de t. Ainsi, on peut regarder la Méchanique comme une Géometrie à quatre dimensions et l'Analyse méchanique comme une extension de l'Analyse géometrique.*"[87]

---

[85] men zou,zoals Robert Hooke , het geheugen van de mens als het zintuig voor de tijd kunnen beschouwen. De Franse psycholoog Pierre Janet, verwierp in 1928 het idee dat we een tijdszintuig zouden bezitten. Zie [WIT 24-25].
[86] geciteerd in [AETIP 108]
[87] "Application de Théorie des Fonctions a la Méchanique", in "Œvres de Lagrange", Vol. 9, Part 3, Ch. 1, p. 337

1.11. De speciale relativiteitstheorie

In de speciale relativiteitstheorie wordt een oplossing gevonden voor het probleem dat de natuurwetten, met inbegrip van die van de elektrodynamika, invariant moeten zijn tegenover transformaties van de koördonatenstelsels. Deze oplossing zal blijken te zijn dat de ruimte en de tijd veranderen (de ruimte trekt samen en de tijd vertraagt) naarmate een beweging sneller gebeurt. De tijdruimte die zich op deze wijze gedraagt is de Minkowskiruimte.

1.11.1. Het ontstaan van de speciale relativiteitstheorie

In hetzelfde jaar als waarin Michelson en Morley hun experiment uitvoerden, schreef **Woldemar Voigt** de relativistische transformaties neer, poneerde de absolute lichtsnelheid en paste impliciet het invariantieprincipe toe in zijn artikel[88] over het Dopplereffekt: "*Voigt's 1887 paper 'On Doppler's Principle' is a very remarkable work. It is remarkable because it contains several original and fundamental ideas of modern physics: (a) Voigt appears to be the first physicist to conceive of the idea of the universal speed of light.(b) He appears to be the first physicist who postulated the invariance of a physics law, the wave equation in 'an elastic incompressible medium'(i.e., the aether or ether),* […] *and employed it to derive the Doppler effect. (c) He showed that the Doppler shift of frequency is incompatible with Newtonian absolute time ($t_0 = t$) and is in harmony with a 'relative time'* […] *which is the approximate relativistic time. (d) He first derived a type of 4-dimensional space-time transformation* […] *which differs from the Lorentz transformations by an overall constant factor* […] *According to Voigt, the transformations are for the (absolute) rest frame $F(ct; x; y; z) = F(0)$ and the frame $F^0(ct^0 ; x^0 ; y^0; z^0) = F^0 (V_a)$ which moves with a constant (absolute) velocity V_a in the aether. The existence of such an aether was taken for granted at that time."* [89]

Deze transformaties werden nadien herontdekt door **FitzGerald**, Hendrik Antoon Lorentz en **Joseph Larmor**[90] en werden door Jules Henri Poincaré[91] de "Lorentztransformaties" genoemd. Lorentz zelf gaf de voorkeur aan de term "relativistische transformaties" omdat hij de prioriteit van Voigt en FitzGerald erkende.

---

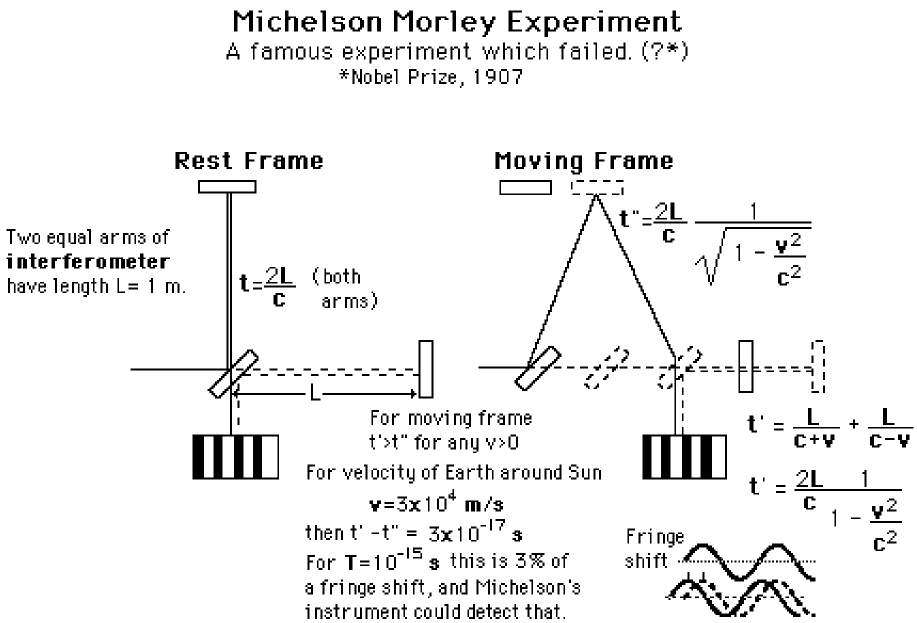
[88] in "Über das Doppler'sche Princip", Nachr. Ges. Wiss. Goettingen 41 (1887).

[89] Andreas Ernst and Jong-Ping Hsu, "First Proposal of the Universal Speed of Light by Voigt in 1887", Chinese Journal Of Physics, Vol. 39, No. 3 June 2001. (De formules van Voigt zijn uit het citaat weggelaten).

[90] Joseph Larmor stelt dat de ether niets anders is dan de differentiaalvergelijkingen die de eigenschappen van een kontinuum (het woord kontinuum is waarschijnlijk op basis van een mystieke motivatie gekozen) in de ruimte zijn: "*At the same time all that is known (or perhaps need be known) of the aether itself may be formulated as a scheme of differential equations defining the properties of a* ***continuum*** *in space, which it would be gratuitous to further explain by any complication of structure; though we can with great advantage employ our stock of ordinary dynamical concepts in describing the succession of different states thereby defined.*" Zie ook de bijlagen van Larmor in de Dover-uitgave van [M&M] van Maxwell.

[91] in "Sur la dynamique de l'électon" uit 1905 (zie citaat onderaan pagina 29 verderop).

Hendrik Antoon Lorentz kwam op basis van het experiment van Michelson & Morley[92] tot de formules die de samentrekking van de ruimte en de vertraging van de tijd weergeven.



figuur 8 door C.R. Nave[93]

Lorentz had het bestaan van elektronen gepostuleerd om het Zeeman effekt te verklaren[94]. Op het ogenblik dat hij zijn theorie formuleert denkt hij nog in termen van molekulen die zich bewegen door een ether. Deze ether is dan de drager van de elektromagnetische velden, waaronder licht. Deze kombinatie van nieuwe en oude begrippen staan hem toe om te veronderstellen dat vaste voorwerpen samengedrukt konden worden op atomair nivo ten gevolge van de beweging door de ether: "*Thus one would have to imagine that the motion of a solid body (such as a brass rod or the stone disc employed in the later experiments) through the resting ether exerts upon the dimensions of that body an influence which varies according to the orientation of the body with respect to the direction of motion.* [...] *Surprising as this hypothesis may appear at first sight, yet we shall have to admit that it is by no means far-fetched, as soon as we assume that molecular forces are also transmitted through the ether, like the electric and magnetic forces of which we are able at the present time to make this assertation definitely. If they are so transmitted, the translation will very probably affect the action between two molecules or atoms in a manner resembling the attraction or repulsion between charged particles.*"[95] Lorentz beschouwt zijn formules dus niet als een beschrijving van het samentrekken van de ruimte zelf.

[92] Her experiment van Michelson en Morley volstaat niet om er de relativiteitstheorie uit af te leiden. De korrekte manier om tot de relativistische transformaties te komen is aan te tonen dat dit de transformaties zijn waaronder de wetten van het elektromagnetisme invariant zijn, zoals Poincaré expliciet in 1905 en Voigt impliciet in 1887 doen.

[93] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/realtiv/morley.html

[94] [OH 428]

[95] H.A. Lorentz, "Michelson's interference experiment", 1895 [ELWM 5-6]

De relativistische transformaties die de Galileïsche transformaties x'=x-vt, y' = y, z' = z en t'=t zullen vervangen zijn:

$$x'=(x-vt) / \sqrt{(1-v^2/c^2)},$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t'=(t-vx/c^2) / \sqrt{(1-v^2/c^2)}$$

Aan het einde van de negentiende eeuw valt **Jules Henri Poincaré** het onderscheid aan dat Lorentz en Larmor maakten tussen lokale en universele (absolute) tijd[96] en stelde het begrip simultaneïteit in vraag: "*Nous n'avons pas l'intuition directe de l'égalité de deux intervalles de temps. Les personnes qui croient posséder cette intuition sont dupes d'une illusion... Le temps doit être défini de telle facon que les équations de la méquanique soient aussi simples que possible. En d'autres termes, il n'y a pas une manière de mesurer le temps qui soit plus vrai qu'une autre; celle qui est généralement adoptée est seulement plus commode.* […] *Il a commencé par admettre que la lumière a une vitesse constante, et en particulier que sa vitesse est la même dans toutes les directions. C'est là un postulat sans lequel aucune mesure de cette vitesse ne pourrait être tentée. Ce postulat ne pourra jamais être vérifié directment par l'expérience; il pourrait être contredit par elle, si les résultats des diverses mesures n'étaient pas concordants. Nous devons nous estimer hereux que cette contradiction n'ait pas lieu et que les petites discordances qui peuvent se produire puissent s'expliquer facilement.* [… C]*'est que je veux retenir, c'est qu'il nous fournit une règle nouvelle pour la recherche de la simultanéité... Il est difficile de séparer le problème qualitatif de la simultanéité du problème quantitatif de la mesure du temps; soit qu'on se serve d'un chronomètre, soit qu'on ait à tenir compte d'une vitesse de transmission, comme celle de la lumière, car on ne saurait mesurer une pareille vitesse sans mesurer un temps.* [...] *La simultanéité de deux événements, ou l'ordre de leur succession, l'égalité de deux durées, doivent être définies de telle sorte que l'énoncé des lois naturelles soit aussi simple que possible. En d'autres termes, toutes ces règles, toutes ces définitions ne sont que le fruit d'un opportunisme incoscient."*[97]

Reeds in 1900 stelt Henri Poincaré voor om een volledig nieuwe hypothese op te stellen die het experiment van Michelson & Morley verklaart: "[...] *les termes du second ordre auraient dû devenir sensibles, et cependant le résultat a encore été négatif, la théorie de Lorentz laissant prévoir un résultat positif. On a alors imaginé une hypothèse supplémentaire: tous les corps subiraient un raccourcissement dans le sens du mouvement de la Terre* [... C]*ette étrange propriété semblerait un véritable coup de pouce donné par la nature pour éviter que le mouvement de la Terre puisse être révélé par des phénomènes optiques. Ceci ne saurait me satisfaire et je crois devoir dire ici mon sentiment: je considère comme très problables que les phénomènes optiques ne dépendent que des mouvements relatifs des corpes matériels en presence...et cela non pas aux quantités près de l'ordre du carré ou du cube de l'aberration, mais rigouresement. A mesure que les expériences deviendront plus exactes, ce principe sera vérifié avec plus de precision.*"[98]

In 1902 valt Poincaré de absolute ruimte en tijd aan:
"*1° Il n'y a pas d'espace absolu et nous ne concevons que des mouvements relatifs...*

[96] Woldemar Voigt had geen onderscheid gemaakt tussen "tijd" en "lokale tijd" in "Über das Doppler'sche Princip"
[97] H. Poincaré, *La mesure du temps*, in *Revue de métaphysique et de morale* **6** (1898), pp. 1-13.
[98] H. Poincaré, *Électricité et optique. La lumière et les théories électrodynamiques. Lecon professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899*, Paris, Carré et Naud 1901, p. 536.

2° Il n'y a pas de temps absolu; dire que deux durées sont égales, c'est une assertion qui n'a par elle-même aucun sense et qui n'en peut acquérir un que par convention...
3° Non seulement nous n'avons pas l'intuition directe de l'égalité de deux durées, mais nous n'avons même pas celle de la simultanéité de deux événements qui se produisent sur des théâtres différents; c'est ce que j'ai expliqué dans un article intitulé la Mesure du temps;
4° Enfin notre géometrie euclidienne n'est elle-même qu'un sorte de convention de langage; nous porrions énoncer les faits mécaniques en les rapportant à un espace non euclidien qui serait un repère moins commode, mais tout aussi légitime que notre espace ordinaire; l'énoncé deviendrait ainsi beaucoup plus compliqué; mais il resterait possible. Ainsi l'espace absolu, le temps absolu, la géométrie même ne sont pas des conditions qui s'imposent à la mécanique; toutes ces choses ne preéexistent pas plus à la mécanique que la langue francaise ne préexiste logiquement aux vérités que l'on exprime en francais."[99] Een experiment kan niets vertellen over de meetkunde van de ruimte: we kunnen enkel objekten meten in de ruimte. Welke meetkunde we kiezen is een kwestie van konventie en hij verwacht dat de Euklidische meetkunde het favoriete systeem zal blijven.

Voor Poincaré waren er drie kriteria[100] waaraan een theorie moet voldoen om aanvaardbaar te zijn:

1) De koëfficient van Fizeau moet gerespekteerd worden[101]
2) Het behoud van elektriciteit en magnetisme moet gerespekteerd worden
3) Het principe aktie is gelijk aan reaktie moet gerespekteerd worden.

In 1904 bespreekt Poincaré tijdens een lezing voor het International Congress of Arts and Science te Saint Louis[102] het relativiteitsprincipe dat stelt dat de wetten van de natuurkunde dezelfde zijn in alle inertiële referentiestelsels, dit wil zeggen in alle referentiestelsels die niet versnellen ten opzichte van mekaar.

Lorentz wijst de benadering door Poincaré in 1904 nog af: "*Poincaré has objected to the existing theory of electric and optical phenomena in moving bodies that, in order to explain Michelson's negative result, the introduction of a new hypothesis has been required, and that the same necessity may occur each time new facts will be brought to light. Surely this course of inventing special hypotheses for each new experimental result is somewhat artificial. It would be more satisfactory if it were possible to show by means of certain fundamental assumptions and without neglecting terms of one order of magnitude or another, that many electromagnetic actions are entirely independent of the motion of the system. Some years ago, I already sought to frame a theory of this kind. I believe it is now possible to threat the subject with a better result. The only restriction as regards the velocity will be that it be less than that of light.*"[103] Lorentz wil dus eigenschappen als de onafhankelijkheid van de lichtsnelheid ten aanzien van de beweging van de lichtbron afleiden uit andere fysische (mechanische en elektromagnetische) principes.

De eerste korrekte en volledige formulering van de relativistische transformaties, het bewijs dat deze transformaties een symmetriegroep vormen en dat de wetten van Maxwell onder deze transformaties invariant zijn presenteert Poincaré in 1905: "*Le point essentiel, établi par Lorentz, c'est que les équations du champ électromagnétique ne sont pas altérées par une certaine transformation (que j'appellerai du nom de Lorentz) et qui est de la forme suivante a) x' = kl (x + e*

---

[99] H. Poincaré, *La science et l'hypothès*e, 1902, ch. VI, pp. 111-112.
[100] [EMA 12]
[101] het experiment van Fizeau uit 1850 is analoog aan dat van Michelson en Morley, maar dan uitgevoerd in een stromende vloeistof, waarbij een lichtstraal opgesplitst wordt in een straal die stroomopwaards schijnt en een lichtstraal die stroomafwaerds schijnt.
[102] [BR 186-187]
[103] H.A. Lorentz, "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light", [ELWM 12-13]

t), $y' = l y$ *,* $z' = l z$*,* $t' = kl (t + e c)$ *x, y, z sont les coordonnées et t le temps avant la transformation, x', y', z' et t' après la transformation. D'ailleurs e est une constante qui définit la transformation* $k = (1 - e^2)^{-1/2}$ *et l est une fonction quelconque de e On voit que dans cette transformation l'axe des x joue un rôle particulier, mais on peut évidemment construire une transformation où ce rôle serait joué par une droite quelconque passant par l'origine. L'ensemble de toutes ces transformations, joint à l'ensemble de toutes les rotations de l'espace, doit former un groupe, mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut que* $l = 1$ *; on est donc conduit à supposer* $l = 1$ *et c'est là une conséquence que Lorentz avait obtenue par une autre voie.*"[104] In hetzelfde artikel verschijnen ook de relativistische formules voor lading, de stroomdichtheid en impliciet de snelheid van het elektron: "*Soient r la densité électrique de l'électron, x, h, z sa vitesse avant la transformation; on aura pour les mêmes quantités r ', x ', h', z' après la transformation (2)* $r' = k r (1 + e x) / l 3$ *,* $r' x' = kr (x + e) /l3$*,* $r' h' = r h / l 3$*,* $r' z' = r z / l 3$ *Ces formules diffèrent un peu de celles qui avaient été trouvées par Lorentz. Soient maintenant X, Y, Z, et X', Y', Z' les trois composantes de la force avant et après la transformation, la force est rapportée à l'unité de volume; je trouve (3)* $X' = k (X +e S X x)/l5$*,* $Y' = Y/l5$*,* $Z' = Z/l5$ *Ces formules diffèrent également un peu de celles de Lorentz; le terme complémentaire en S X x rappelle un résultat obtenu autrefois par M. Liénard. Si nous désignons maintenant par X1 , Y1 , Z1 , et X1', Y1', Z1' les composantes de la force rapportée non plus à l'unité de volume, mais à l'unité de masse de l'électron, nous aurons (4)* $X1' = k r (X1 + e S X1 x) / (r' l 5)$*,* $Y1' = r Y1 / (r' l 5)$ *,* $Z1' = r Z1 / (r' l 5)$"[105]

Het niet-meetbaar zijn van de ether wil niet noodzakelijk zeggen dat er geen absolute ruimte bestaat, enkel dat die niet op basis van mechanische of elektromagnetische experimenten kan gevonden worden. Tot op heden zijn er natuurkundigen die op zoek zijn naar deze absolute ruimte. Voor de relativiteit volgens Poincaré is, aangezien het volgens zijn konventionalisme niet mogelijk is de werkelijke geometrie van de ruimte en tijd te bepalen, het al dan niet bestaan van de ether niet relevant. **Albert Einstein** zal stellen dat er geen ether bestaat: "*The introduction of a 'luminiferous ether' will prove to be superfluous inasmuch as the view here to be developed will not require an 'absolutely stationary space' provided with special properties, nor assign a velocity-vector to a point of empty space in which electromagnetic processes take place*"[106] Hier dient opgemerkt te worden dat vanuit een "scheermes van Ockham"-redenering deze stap wel verantwoord is, maar dat het nooit aangetoond is dat er geen ether bestaat en er nog steeds fysici zijn die overtuigd zijn van het bestaan van een ether in één of andere vorm[107].

Einstein giet de theorie van Poincaré in de "speciale relativiteitstheorie", uitgaande uit van twee a priori's: "*Examples of this sort* [gevolgen van de wetten van Maxwell]*, together with the unsuccessful attempts to discover any motion of the earth relatively to the "light medium"* [het experiment van Michelson & Morley]*, suggest that the phenomena of electrodynamics as well as of mechanics possess no properties corresponding to the idea of absolute rest. They suggest rather that, as has already been shown to the first order of small quantities, the same laws of electrodynamics and optics will be valid for all frames of reference for which the equations of mechanics hold good. We will raise this conjecture (the purport of which will hereafter be called the "Principle of Relativity") to the status of a postulate, and also introduce another postulate, which is only apparently irreconcilable with the former, namely, that light is always propagated in empty space with a definite velocity c which is independent of the state of motion of the emitting*

[104] "Sur la Dynamique de l'Électron, Comptes rendus hebdomadaires des séances de L'Académie des sciences, 140" (1905), pp. 1504-1508
[105] "Sur la Dynamique de l'Électron, Comptes rendus hebdomadaires des séances de L'Académie des sciences, 140" (1905), pp. 1504-1508
[106] Albert Einstein, "On the electrodynamics of moving bodies" [ELWM 38]
[107] Bijvoorbeeld de "spin foam" waarmee de ruimte in de "Quantum Loop Gravitation"-theorie gevuld is.

body. These two postulates suffice for the attainment of a simple and consistent theory of the electrodynamics of moving bodies based on Maxwell's theory for stationary bodies."[108] De a priori's van Einstein zijn dus het relativiteitsprincipe van Poincaré en de absolute lichtsnelheid van Rømer en Voigt.

Einstein voert het tweede principe hier in de vorm in die stelt dat de lichtsnelheid konstant is. Het relativiteitsbeginsel en het principe dat de beweging van het licht onafhankelijk is van de beweging van de lichtbron zijn reeds voldoende[109] om tot de konklusie te komen dat de snelheid van het licht konstant is binnen een bepaald medium. In vacuum is de lichtsnelheid[110] maximaal: c = 3.00 x 10^8 m/s of in eenheidsloze vorm c = 1 indien bijvoorbeeld als tijdseenheid het jaar en als lengte-eenheid het lichtjaar gekozen worden. Deze eindige universele snelheid vervangt dus de oneindige universele snelheid van Newton en Galileï.

Om het relativiteitsbeginsel te begrijpen moeten we ingaan op referentiestelsels en waarnemers. Een waarnemer is iemand met een klok en een meetlat, zodat die in staat is om posities in ruimte en tijd op te meten. Een referentiestelsel bestaat uit oorsprong met daarin een assenstelsel. Elke waarnemer zal de resultaten van zijn of haar metingen weergeven ten opzichte van dit referentiestelsel. Het relativiteitsbeginsel veronderstelt ten eerste dat er in elk punt van de ruimte een referentiestelsel kan worden gezet. Het homogeneïteitsprincipe zegt dat ieder punt van de ruimte in die mate hetzelfde is als ieder ander dat het als oorsprong van een assenstelsel kan dienen. In "La science et la methode"[111] beschouwt Poincaré het lichaam van de waarnemer als zijnde het assenstelsel:" *If this intuition of distance, of direction, of the straight line, if, in a word, this direct intuition of space does not exist, whence comes it that we imagine we have it? If this is only an illusion, whence comes it that the illusion is so tenacious ? This is what we must examine. There is no direct intuition of magnitude, as we have said, and we can only arrive at the relation of the magnitude to our measuring instruments. Accordingly we could not have constructed space if we had not had an instrument for measuring it. Well, that instrument to which we refer everything, which we use instinctively, is our own body. It is in reference to our own body that we locate exterior objects, and the only special relations of these objects that we can picture to ourselves are their relations with our body. It is our body that serves us, so to speak, as a system of axes of co-ordinates.*"

Net zomin als op basis van mechanische experimenten een onderscheid gemaakt kan worden tussen een assenstelsel in rust en een assenstelsel in eenparige beweging, kan men dat onderscheid ook niet maken op basis van elektromagnetische verschijnselen. Het speciale relativiteitsbeginsel is dus een uitbreiding van het Galileïsche relativiteitsprincipe.

Het tweede principe zegt dat de beweging van licht onafhankelijk is van de beweging van de lichtbron. Dit principe is in overeenkomst met het experiment van Michelson & Morley en werd in 1964 bevestigd door het experiment van Torsten Alväger[112].

---

[108] Albert Einstein, "On the electrodynamics of moving bodies" [ELWM 37-38]

[109] [BR 198-191]

[110] Sinds 1983 is de meter gedefiniëerd in termen van lichtsnelheid en seconden, de per definitie exacte waarde van de lichtsnelheid is $c \stackrel{def}{=} 2.997924580 \times 10^8$ m/s.

[111] Het hoofdstuk "The relativity of space" uit "Science & Method" (1897) staat in Engelse vertaling op http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/index.htm

[112] In een deeltjesversneller (cyclotron) te Genève werd een proton tot dicht bij de lichtsnelheid gebracht en in botsing gebracht met een Beryllium staaf. Deze botsing van het proton en een Beryllium kern veroorzaakt het ontstaan van twee snel vliegende protonen en soms een snelvliegend pion. Dit pion bestaat niet lang en vervalt in twee gamma stralen en is bijgevolg een snel bewegende (> 0.99c) lichtbron. zie [BR 177]

1.11.2. De tijdruimte van de speciale relativiteitstheorie

Roberto Marcolongo[113] in 1906 en **Hermann Minkowski**[114] (1864-1909) in 1907, ontdekten dat de principes en vergelijkingen van de speciale relativiteitstheorie een nieuwe tijdruimte definiëren, waarbij de absolute ruimte en absolute tijd van Newton ophouden met bestaan[115]. Omwille van de eenvoud wordt de Minkowski-meetkunde meestal niet bestudeerd in de vorm waarin Minkowski die voorstelde, maar als een vierdimensionele pseudo-Euklidische ruimte. Het is deze pseudo-Euklidische ruimte die hieronder, omdat iedereen het doet, "Minkowskiruimte" wordt genoemd, wat zowel inhoudelijk als historisch niet helemaal korrekt is. Deze twee-dimensionale voorstelling[116] wordt het “Lorentzvlak” of “Minkowskiaans vlak” genoemd. De voorstelling van de Minkowskiruimte in twee dimensies is misleidend, omdat er andere symmetrieën gelden dan in vier dimensies. De redenering van Aleksandrov en Zeeman veronderstelt bijvoorbeeld dat er meer dan één ruimtelijke dimensie is en kan dus niet in een Lorentzvlak voorgesteld worden.

In een Lorentzvlak stellen we in het vlak de tijd als een vertikale as en één van de ruimtedimensies (stel x) als een horizontale as voor. De wereldlijn van een voorwerp is de kurve die in dit vlak afgebeeld wordt.

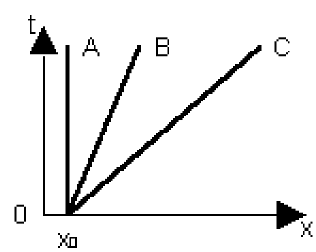


Fig. 9: drie wereldlijnen in een Lorentzvlak. C is de wereldlijn van een lichtdeeltje en heeft de grootst mogelijke hoek ten opzichte van de as t.

In bovenstaande figuur is A de wereldlijn van een voorwerp in rust op positie x_0, B is de wereldlijn van een voorwerp dat vanuit x_0 begint te bewegen en lijn C is de wereldlijn van een lichtstraal die vanuit $(x_0,0)$ wordt verzonden en dus per jaar een licgtjaar aflegt. Hoe groter de hoek tussen de wereldlijn en as t, hoe sneller het voorwerp beweegt. Als deze hoek konstant is (zoals in de tekening), dan is de beweging eenparig.

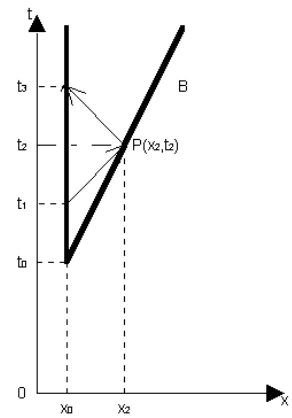
Stel dat een waarnemer die op positie x_0 blijft een lichtstraal stuurt naar een waarnemer die beweegt met snelheid v volgens wereldlijn B beweegt. De waarnemer op B stuurt een lichtsignaal terug zodra hij het eerste signaal ontvangen heeft:

[113] “Sugli integrali delle equazione dell'elettro dinamica", Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, mathematiche e naturali, Series 5, Vol. 15 (1 semestre, April, 1906), p. 344-349

[114] [ELWM] , zie ook [BR 201]

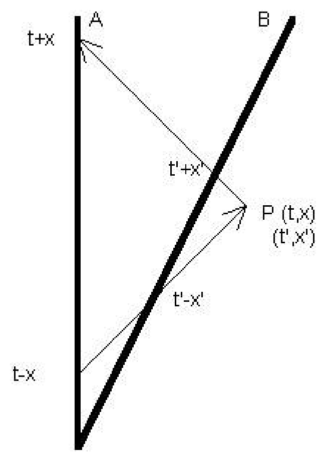
[115] [VPM 291-302]

[116] Karin Verelst, die hierover een artikel voorbereidt, wees mij er op dat Poincaré reeds in 1887 in zijn artikel "Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie" de wiskunde ontwikkeld heeft van de tijdruimte in twee dimensies onder de benaming "la quatrième géometrie".



Figuur 10: op tijdstip t_1 wordt een lichtstraal van (x_0,t_1) verstuurd die aankomt in $P(x_2,t_2)$, onmiddellijk wordt een lichtsignaal teruggestuurd dat aankomt in (x_0,t_3)

De driehoeken $(x_0,t_2)(x_2,t_2)(x_0,t_1)$ en $(x_0,t_2)(x_2,t_2)(x_0,t_3)$ zin rechthoekige driehoeken, zodat de stelling van Pythagoras kan toegepast worden. Bovendien is het lijnstuk $(x_0,t_1)(x_2,t_2)$ even lang als $(x_2,t_2)(x_0,t_3)$ en is de driehoek $(x_0,t_2)(x_2,t_2)(x_0,t_0)$ ook een rechthoekige driehoek. Indien de lichtsignalen in beide richtingen even snel gaan en aangezien alle beschouwde bewegingen eenparig zijn, verhouden[117] de afstanden tussen (x_0,t_0) en (x_0,t_1) enerzijds en tussen (x_0,t_0) en (x_2,t_2) anderzijds zich volgens een konstante $k=((1+v)/\sqrt{(1-v)})$. Indien $v=0$ is $k=1$. De fysische interpretatie[118] van de faktor k is de radiale Dopplerverschuiving[119] waarbij er een roodverschuiving is als $k>1$ en een blauwverschuiving indien $k<1$.



Figuur 11: Een punt P met koördinaten (x,t) ten opzichte van waarnemer A en (x',t') ten opzichte van waarnemer B[120].

Als we nu een punt P beschouwen met de koördinaten (t,x) ten opzichte van de waarnemer op wereldlijn A en met de koördinaten (t',x') ten opzichte van een waarnemer die beweegt volgens lijn B, en we ervan uitgaan dat A en B hun klokken gesynchroniseerd hebben, dan vinden we:

$t'-x'=k(t-x)$ en $t+x=k(t'+x')$

waaruit we de relativistische transformaties $t'=(t-vx/c^2)/\sqrt{}\,(1-v^2/c^2)$ en $x'=(x-vt)/\sqrt{}\,(1-v^2/c^2)^{1/2}$ kunnen afleiden.

117 Een bijkomende veronderstelling is dat de relatie lineair is.
118 [IER 21]
119 Merk op dat het tijdens de studie van het Doppler-effect dat Woldemar Voigt voor het eerst de relativistische transformaties formuleerde.
120 Tekening naar figuur 2.17 in [IER 25].

In matrixvorm kunnen de relativistische transformaties in vier dimenties als volgt geschreven worden[121]:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v/c^2 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

De relativistische transformaties $t'=(t-vx/c^2)/(1-v^2/c^2)^2$ en $x'=(x-vt)/(1-v^2/c^2)^2$ stellen een tijdruimte-rotatie voor, dit is een kombinate van een gewone driedimensionele rotatie met een "Lorentz boost" die een bepaalde snelheid in een ruimtelijke dimensie heeft. Een rotatie in een driedimensionale Euclidische ruimte behoudt één richting (de rotatie-as) en transformeert de twee andere. Een Lorentztransformatie transformeert tijd en één ruimtelijke richting. Aangezien men voor een éénparige beweging de assestelsels steeds kan kiezen zodanig dat de verschuiving langs de x-as is, kunnen we zonder bijkomende informatie te veliezen stellen dat $y'=y$ en $z'=z$.

De transformaties kunnen eenvoudiger geschreven worden door de relativiteitsfaktor $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-½}=(1-\beta^2)^{-½}$ in te voeren waarin $\beta=v/c$ de snelheid relatief tot de lichtsnelheid is. Hoe dichter een snelheid bij de lichtsnelheid komt, hoe groter β en hoe groter de relativistische effekten. De relativistische transformaties worden dan $t'=\gamma(t-vx/c^2)=\gamma(t- \beta x/c)$ of $ct'=\gamma(ct-\beta x)$ en $x'=\gamma(x-\beta ct)$ $=\gamma(x-\beta ct)$ of . Een alternatief om de transformaties te vereenvoudigen is de lichtsnelheid $c=1$ te stellen, dan worden de formules $t'=(t-vx)/\sqrt{(1-v^2)}$ en $x'=(x-vt)/\sqrt{(1-v^2)}$ en is de lichtsnelheid een hoek van 45° ten opzichte van de t-as en -45° ten opzichte van de x-as in het Lorentzvlak.

De vorm $ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ is invariant in de Minkowskiruimte. In tensoriële[122] notatie is deze vorm

$ds^2=\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}\, dx^a\, dx^b$ met de

Minkowski metriek[123] $\mathbf{g}_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ en $t=x^0$, $x=x^1$, $y=x^2$ en $z=x^3$.

Deze vorm $ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ is een uitbreiding van de afstand zoals berekend uit de stelling van Pythagoras naar de vier dimensionele tijdruimte. Indien de vierdimensionale ruimte Euklidisch was in plaats van Minkowskiaans, dan zou deze vorm $ds^2=dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$ zijn en de metrische tensor zou $\mathbf{g}_{ab} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ zijn. Het is mogelijk om van de Minkowskiruimte een "formele Euklidische ruimte" te maken door te stellen dat $ct=x^0$, $ix=x^1$, $iy=x^2$ en $iz=x^3$ waarbij $i=\sqrt{(-1)}$ zodanig dat

[121] De x-as is zodanig gekozen dat de eenparige beweging zich in de x-richting voordoet.

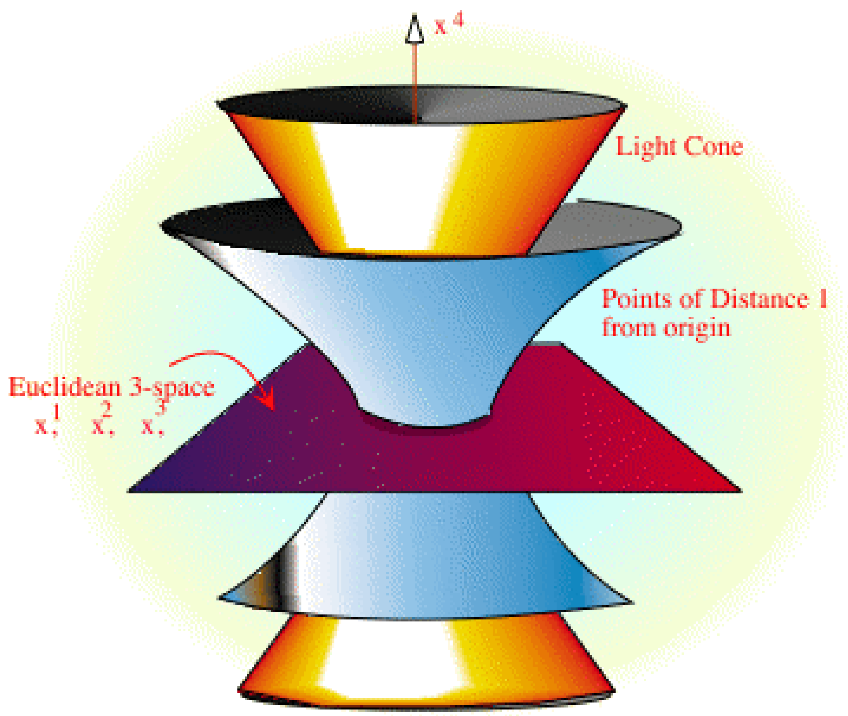
[122] De tensorcalculus werd door Levi-Civita ingevoerd in 1887. Het benaming tensor is door Woldemar Voigt ingevoerd in 1898, hoewel het woord tervoren al gebruikt werd door Hamilton (1846) in de betekenis van wat nu "modulus" wordt genoemd.

[123] Men kan de Minkowskimetriek ook definiëren als $g_{ab}=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, op het teken van de uitwerkingen na is er geen verschil. Meestal hebben theoretiche fysici een voorkeur voor de metriek (...) en de experimentele fysici voor de metriek (...). Bovendien nummeren sommige auteurs hun variabelen x^0 tot x^3 (ik volg deze konventie zoveel mogelijk) en anderen x^1 tot x^4 (bijvoorbeeld in fig. 12 en fig. 13) zodat ook de metrieken diag(-1,-1,-1,1) en diag(1,1,1,-1) voorkomen. Belangrijk aan deze verwarrende notatiekwestie is dat het teken dat bij de tijdsdimentie steeds het ongekeerde teken van de ruimtedimenties heeft.

dezelfde vorm $ds^2=dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$ invariant is, wat de konventionalistische positie van Poincaré ondersteunt.

De Lorentzgroep $\mathscr{L}$ is de verzameling van alle 4×4 matrices **L** waarvoor geldt: $\mathbf{L}^T\mathbf{g}_{ab}\mathbf{L}=\mathbf{g}_{ab}$ waarbij $\mathbf{L}^T$ de getranponeerde matrix is met $\mathbf{L}^T\mathbf{L}=\mathbf{I}$ en de eenheidsmatrix $\mathbf{I}\equiv\mathrm{diag}(1,1,1,1)$. De Poincarégroep $\mathscr{P}$ is de verzameling van alle koördinatentransformaties van de vorm $x'=\mathbf{L}x+a$ met $\mathbf{L}\in\mathscr{L}$. Beide verzamelingen zijn groepen: er is een associatieve bewerking, een eenheidselement **I** en voor ieder element een invers element $\mathbf{L}^{-1}=\mathbf{g}_{ab}\mathbf{L}^T\mathbf{g}_{ab}$.

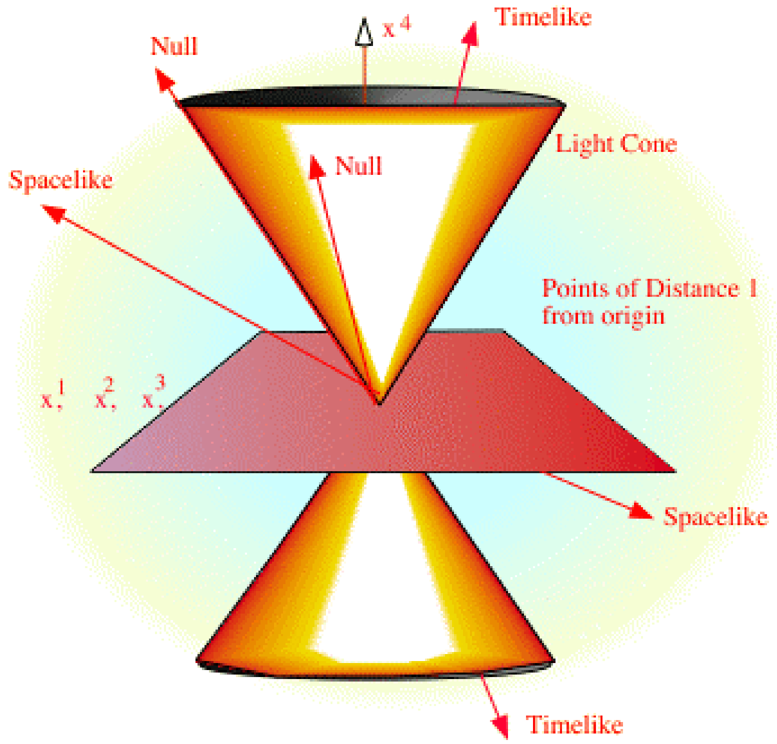
Waar in de Euclidische ruimte het oppervlak van punten die op een vaste afstand R van de oorsprong liggen een bol vormen, is het oppervlak op een afstand R in de Minkowskiruimte hyperbolisch. In figuur 12 wordt de drie-dimensionale ruimte op een vlak geprojekteerd en wordt de tijd voorgesteld door de as x^4. De verzameling van alle punten met afstand nul tot de oorsprong wordt voorgesteld door de lichtkegel[124] (in de Euklidische ruimte is de verzameling van alle punten met afstand nul enkel dat punt zelf), de buitenste hyperboloïde stelt de punten voor die op een afstand 1 van de oorsprong liggen.



Figuur 12 door S.Warner[125]:
De oppervlakken met respektievelijk afstand 0 en 1 tot de oorsprong in de Minkowskiruimte.
De vertikale x^4 as stelt de tijd voor.

[124] Eigenlijk een lichthyperboloïde, maar de dubbele kegel wordt gemeenzaam "lichtkegel" genoemd
[125] http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Warner/diff_geom/Sec6.html

De lichtkegel of nulkegel is het driedimensionele hyper-oppervlak waarvoor geldt dat v=c, dit is enkel mogelijk voor deeltjes waarvan de massa gelijk is aan nul. Op de figuur 13 bevindt de oorsprong van het assenstelsel zich in de punt van de lichtkegel.



Figuur 13 door S.Warner[126]: Tijd-, ruimte- en lichtachtige lijnen in Minkowski tijdruimte

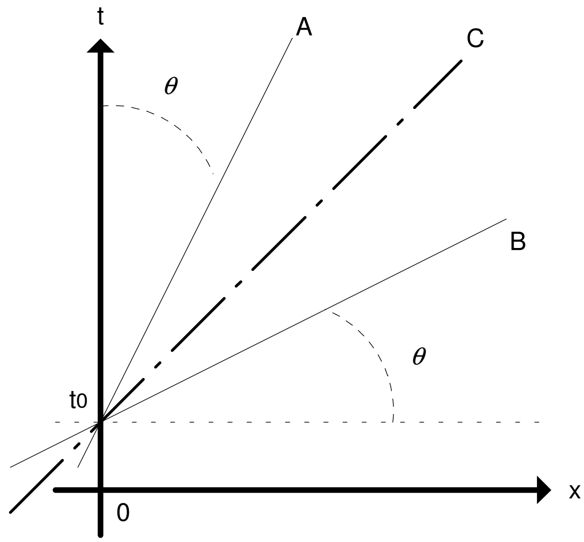
Materie met massa kan de lichtsnelheid enkel benaderen maar nooit bereiken. Een lijn op het oppervlak van deze hyperboloïde stelt een lichtstraal voor en wordt een nullijn genoemd. Gebeurtenissen die binnen het oppervlak liggen zijn spatiotemporele posities die vanuit de oorsprong kunnen bereikt worden met een snelheid v kleiner dan c, m.a.w. door materiële voorwerpen. Om posities buiten het oppervlak te bereiken zou mijn snelheid groter moeten zijn dan c. Deze posities zijn dus onbereikbaar[127]. De lijnen die binnen de hyperboloïde liggen worden "tijdachtig" genoemd, materie kan enkel volgens een tijdachtige lijn bewegen. Lijnen die buiten het oppervlak liggen worden "ruimte-achtig" genoemd.

---

[126] Het oppervlak van de punten met afstand 1 tot de oorsprong is niet afgebeeld. http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Warner/diff_geom/Sec6.html

[127] Tachyonen en andere deeltjes die sneller zouden gaan dan het licht (en dus van toekomst naar verleden reizen) laat ik hier buiten beschouwing, ze zouden toch niet kunnen interageren met voorwerpen die trager dan de lichtsnelheid bewegen [ST&EM 112]. Er is bijgevolg niets dat ons belet om vrijblijvend te stellen dat er draken bestaan die eenparig sneller dan het licht door de tijdruimte vliegen. Het zou niet meer vrijbnlijvend zijn te stellen dat dergelijke draken zouden kunnen vertragen tot onder de lichtsnelheid.

In het Lorentzvlak staat een rechte A orthogonaal op een rechte B indien de hoek van de rechte A dezelfde hoek vormt ten opzichte van de tijd-as als de rechte B ten opzichte van de ruimte-as.



Minkowskiaanse orthogonaliteit

Figuur 14: A $\perp$ B, C $\perp$ C

Indien de rechte A de wereldlijn is van een waarnemer die langs die rechte door tijdruimte rijst, dan is deze rechte voor deze waarnemer zijn tijdsas. (De rechte t is de tijdsas voor een waarnemer die stilstaat ten opzichte van de oorsprong 0.) De rechte B is dan de ruimte-as voor deze waarnemer: alles wat op een evenwijdige aan deze rechte ligt, gebeurt voor de waarnemer die langs A reist tegelijkertijd. Voor een stilstaande waarnemer gebeuren die geneurtenissen die op een evenwijdige aan de x-as liggen simultaan. Rechte C is een lichtstraal (met lichtsnelheid c=1) en staat – in haar eigen assenstelsel met de rechte C zelf zowel als tijdsas als als ruimte-as – loodrecht op zichzelf.

In het Minkowski-vlak wordt het in-produkt tussen twee vektoren[128] $\mathbf{a}(x_1,t_1)$ en $\mathbf{b}(x_2,t_2)$ dat orthogonaliteit uitdrukt gedefinïeerd als:

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = t_1t_2 - x_1x_2 = (t_1\ x_1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

In de Minkowski tijdruimte is dit in-produkt voor de vektoren[129] $\mathbf{a}(t_1,x_1, y_1, z_1)$ en $\mathbf{b}(t_2,x_2, y_1, z_1)$:

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2$$

$$= (t_1,x_1, y_1, z_1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_2 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

waarin we de metrische tensor $\mathbf{g}_{ab}$ = diag(1,-1,-1,-1) terugvinden. De Minkowski-metriek weerspiegelt de absolute natuurwetten voor de mechanika en het elektromagnetisme en de absolute lichtsnelheid.

[128] [OSG 7]
[129] [OSG 13]

1.12. Algemene relativiteitstheorie

De algemene relativiteitstheorie beschrijft referentiestelsels die in versnelling zijn. Het belangrijke verschil met de Newtoniaanse mechanika en de speciale relativiteitstheorie is de rol van de massa. Waar de aanwezigheid van materie geen invloed heeft op de ruimte in de Newtoniaanse mechanika en de speciale relativiteitstheorie, veroorzaakt de massa in de algemene theorie van Hilbert een kromming van de tijdruimte. Het is deze kromming van de tijdruimte die de gravitationele aantrekkingskracht (zwaartekracht) veroorzaakt.

Newton's zwaartekrachtwet $\boxed{F = G M_1 M_2 / d^2}$ uit de Principia (1687) waarin F de kracht is tussen lichamen met de massa's M_1 em M_2 , d de afstand tussen de lichamen is en G gravitationele konstante[130] is, vormt de basis waarop onder meer Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi, Clairaut en Laplace de klassieke analytische zwaartekrachttheorie uitwerkten.

In 1782 stelt **George-Louis Le Sage** dat zwaartekracht zich tegen lichtsnelheid voortplant.

Maxwell merkt, na zijn studie van het elektromagnetisme op dat er interessante gelijkenissen zijn tussen elektromagnetische kracht en zwaartekracht: "*After tracing to the action of the surrounding medium both the magnetic and the electric attractions and repulsions, and finding them to depend on the inverse square of the distance, we are naturally led to inquire whether the attraction of gravitation, which follows the same law of the distance, is not also traceable to the action of a surrounding medium.* […] As *I am unable to understand in what way a medium can possess such properties, I cannot go further in this direction in searching for the cause of gravitation.*"[131] Een belangrijk verschil tussen elektrische kracht en zwaartekracht dat Maxwell opmerkt is dat de elektrische kracht tussen tegengestelde ladingen werkt en dat zwaartekracht door twee "positieve" massa's werkt.

Van 1877 tot 1881 voerde mijnbouwingenieur **Robert Stevenson** valexperimenten[132] met liften in mijnschachten en formuleerde het ekwivalentieprincipe. Stevenson komt tot de konklusie dat er geen onderscheid kan gemaakt worden tussen de lift die naar de aarde valt en de aarde die naar de lift valt; en dat de valbeweging ingebeeld is (zoals de beweging van de zon rond de aarde ingebeeld is).

In 1893 formuleert **Ernst Mach** (1838-1916) het principe van de relativiteit van inertie[133]. Dit principe was reeds eerder gekend door **Boscovich** (1763) en **F.W.H.A von Humboldt** (1808) en stelt dat als er geen materie is, er geen energie is. Een lichaam in een verder leeg universum heeft geen inertiële eigenschappen. Mach toont dat de "conceptueel monstruele absolute ruimte"[134] als verklaring voor het bestaan van centifugale krachten niet nodig is: "*Newton's experiment with the*

---

[130] $G = 6.6726 \times 10^{-11}\ m^3 s^{-2} kg^{-1}$ [OH 971]

[131] Maxwell, "A dynamical theory of the electromagnetic field" (1864)

[132] Dit is dus, in tegenstelling tot wat Einstein beweert, geen "gedachtenexperiment", maar is wel degelijk uitgevoerd met gevaar voor het leven van de onderzoeker: "*Years before that, when in England, where some of our cole mines had vertical shafts about 1500 feet deep, I had studied the cause of weight by having the hoisting engine drop me down with the full acceleration for about 500 feet. Then, by retardation during the the lowest 500 feet, I could experience increase of weight all over me so marked that my legs could hardly support me. That taught me that acceleration was the proximate cause of weight, but at the time of the experiments I still thought the acceleration of the falling cage was really caused by the earth's attraction.*", Robert Stevenson (pseudoniem: "Kinertia"), "Do bodies fall?", Harper's Weekly, Volume 59, 1914.

[133] Einstein noemt dit het "Principe van Mach"

[134] "das Begriffsungetüm des absoluten Raumes", [COS 143].

rotating vessel of water simply informs us, that the relative rotation of the water with respect to the sides of the vessel produces no noticable centrifugal forces, but that such forces are produced by its relative rotation with respect to the mass of the earth and the other celestial bodies. No one is competent to say how the experiment would turn out if the sides of the vessel increased in thickness and mass till they were ultimately several leagues thick"[135] Mach ziet beweging dus niet ten opzichte van een "metafysische absolute ruimte" maar ten opzichte van het zwaartepunt van alle massa's in het heelal. De distributie van de materie, voornamelijk die van de vaste sterren, bepaalt de geometrie van het universum.

H.A. Lorentz (in 1900) en **Jules Henri Poincaré** (in 1905) stellen dat de zwaartekracht zich voortplant tegen de lichtsnelheid.

Albert Einstein formuleert het ekwivalentieprincipe in 1907 en noemt dit zijn "gelukkigste gedachte": "*[W]e shall therefore assume the complete physical equivalence of a gravitational field and the corresponding acceleration of the reference frame. This assumption extends the principle of relativity to the case of uniformly accelerated motion of the reference frame.*". Gedurende de daarop volgende jaren publiceert Einstein verschillende foutieve versies van zijn zwaartekrachttheorie op basis van graviteitspotentialen. Via **Marcel Grossmann** komt Einstein in kontakt met de tensor kalkulus van Ricci en Levi-Civita en de Riemann-Christoffel tensor.

Gustav Mie tracht een algemene kovariante theorie op te bouwen op basis van het elektromagnetisme. Verdere ontwikkelling van de theorie wordt ondernomen door onder meer H. Bateman, Levi-Civita, Emmy Noether en Abraham.

David Hilbert, die na het overlijden van Poincaré diens werk verder zette[136] betreffende de algemene relativiteitstheorie, dient eind 1915 een axiomatisch systeem in voor de algemene relativiteitstheorie, waarin hij als eerste[137] de gravitationele veldvergelijking presenteert.:

"*Ich möchte im Folgenden – im Sinne der axiomatischen Methode – wesentlich aus zwei einfachen Axiomen ein neues System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der Probleme von Einstein und Mie gleichzeitig enthalten ist.* [...]

Es seien w_s ($w = 1, 2, 3, 4$) *irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter (allgemeinste Raum-Zeit-Koordinaten). Die das Geschehen in* w_s *charakterisierende Größe seien:*

1) die when zuerst von Einstein eingeführten Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu = 1, 2, 3, 4$) *mit symmetrischen Tensorcharakter gegenüber einer neliebigen Transformation der Weltparameter* w_s.

---

135 [COS 142]

136 [E&P 207-257]

137 De kontroverse over de prioriteit is nog niet beslecht: het Comite voor de Nobelprijs erkent de prioriteit van Hilbert, zie http://www.nobel.se/physics/educational/relativity/history-1.html. Leo Corry, Jürgen Renn, en John Stachel stellen in "*Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Disput*e." (Science, Vol. 278) dat Hilbert's oorspronkelijke versie van "Die Grundlagen der Physik" de gravitationele veldvergelijking niet bevatten. Ze baseren zich hiervoor op onvolledige proefdrukken (afgestempeld op 6 december 1915) waaruit echter uit verschillende pagina's stukken weggesneden zijn. Hun stelling wordt dan weer aangevallen door Tilman Sauer ("The relativity of discovery: Hilbert's first note on the foundations of physics", Archive for History of Exact Sciences, Vol. 53, Nr. 6(1999), pp.. 529-575), Friedwardt Winterberg (University of Nevada, Reno) en Christopher Jon Bjerknes [AOEGTR].

2) die vier elektrodynamischen Potentiale q_s mit Vektorcharakter im selben Sinne.

Axiom I (Mie's Axiom von der weltfunktion): Das Gesetz des physikalischen Geschehens bestimmt sich durch eine Weltfunktion H, *die folgende Argumente enthält:*

(1) $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu 1} = \partial g_{\mu\nu}/\partial w_l$, $g_{\mu\nu lk} = \partial^2 g_{\mu\nu}/\partial w_l \partial w_k$
(2) q_s, $q_{sl} = \partial q_s/\partial w_l$, $(l,k = 1,2,3,4)$

und zwar muß die Variation des Integrals $\int H \sqrt{(g)}\, \partial\omega$
$(g = |g_{\mu\nu}|$, $\partial\omega = \partial w_1\, \partial w_2\, \partial w_3\, \partial w_4)$ *fur jedes der 14 Potentiale* $g_{\mu\nu}$, q_s *verschwinden.*

An Stelle der Argumente (1) können offenbar auch die Argumente
(3) $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}=\partial g^{\mu\nu}/\partial w_l$, $g_{lk}^{\mu\nu}=\partial^2 g^{\mu\nu}/\partial\omega\partial w_k$
treten, wobei $g^{\mu\nu}$ *die durch* g *dividierte Unterdeterminante Der Determinante g in Bezug auf ihr Element* $g_{\mu\nu}$ *bedeutet.*

Axiom II (Axiom von der allgemeinen Invarianz): die Weltfunktion H is eine Invariante gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s.

Axiom II ist die einfachste mathematische Ausdruck für die Forderung, daß die verkettung der potentiale $g_{\mu\nu}$,q_s *an und für sich völlig unabhängig ist von der Art, wie man die Weltpunkte durch Weltparameter bekennen will.*"[138]

Vanuit deze twee axioma's komt Hilbert tot de gravitationele veldvergelijking:

$$[\sqrt{(g)}\, K]_{\mu\nu} + \partial\sqrt{(g)}L/\partial g^{\mu\nu} = 0$$

Albert Einstein publiceert in dezelfde maand als David Hilbert de algemene relativiteitstheorie en hield daarbij volgende principes[139] voor ogen:

1. Mach's principe van relativiteit van inertie
2. ekwivalentieprincipe
3. kovariantieprincipe: Aangezien alle waarnemers gelijkwaardig zijn, gaat Einstein er van uit dat alle vergelijkingen in een tensoriële vorm[140] geschreven kunnen worden.
4. principe van de minimale gravitationele koppeling: er worden bij de overgang van de speciale naar de algemene theorie geen termen ingevoerd die ekspliciet de krommingstensor bevatten: de vergelijking $\delta_b T^{ab}=0$ uit de speciale theorie wordt in de algemene theorie $\nabla_b T^{ab} = 0$ en niet $\nabla_b T^{ab} + g^{bc} R^a{}_{bcd} \nabla_\varepsilon T^{cd} = 0$. Dit principe heeft Einstein niet expliciet gesteld, maar wel toegepast.
5. korrespondentieprincipe: binnen hun geldigheidsdomein moeten de Newtoniaanse mechanika en de speciale relativiteitstheorie konsistent zijn met de algemene relativiteitstheorie.

138 David Hilbert, "Die Grundlagen der Physik, (Erste Mitteilung.) Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915" in "Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse", p. 396.
139 [IER 120]
140 Sindsdien is gebleken dat elke natuurkundige theorie in tensoriële vorm kan geschreven worden, dit is dus niet zozeer een principe van de algemene relativiteitstheorie als wel een eigenschap van natuurkundige theorieën als dusdanig.

De aanwezigheid van materie veroorzaakt een kromming van de tijdruimte en door de wet van de minste arbeid zal een bewegend voorwerp een zo “goedkoop” mogelijk pad vormen en dus door de materie die de tijdruimte vervormd heeft aangetrokken worden en in die richting versnellen. Of andersom: de kromming van de tijdruimte veroorzaakt de aanwezigheid van materie – materie is in deze visie identiek aan de kromming van de tijdruimte, dit wordt de “marmere”[141] voorstelling van het universum genoemd . Tijdruimte is in de algemene theorie niet langer homogeen en isotroop: in ieder punt zijn er verschillende geometrische eigenschappen en verschillende bevoorrechtte richtingen.

De gravitationele veldvergelijking is niet volledig oplosbaar, maar er zijn verschillende interessante oplossingen gevonden. In 1916 vond **Karl Schwarzschild** een wiskundige oplossing voor de gravitationele veldvergelijking van het zwaartekrachtveld van een kompakt massief objekt. Het is vooral op basis van deze oplossing dat het latere kosmologische werk (over bijvoorbeeld zwarte gaten, pulsars en neutronensterren) is gebaseerd.

[141] Het “marmeren” universum, waarin de deeltjes volgens het principe van de minimale arbeid de geometrie van de ruimte volgen wordt meestal tegenover het “houten” (oneffen, met splinters) universum van de deeltjesfysika geplaatst, vooral door voorstanders van de stringtheorie: zie [HS] .

1.13. Kwantummechanika

De tegenstelling tussen de deeltjesbenadering (Newton, Einstein) en de golfbenadering[142] (Huyghens[143], Young[144]) van licht mondde in de twintigste eeuw uit in de kwantummechanika waarin licht en materie tegelijkertijd[145] zowel een golfkarakter als een deeltjeskarakter hebben.

Het begrip "kwantum" werd in 1900 ingevoerd door **Max Planck** (1858-1947) die werkte op het probleem van "Maxwell's duivel" en de benadering daarvan door Ludwig Boltzman. Volgens Thomas Kuhn[146] was het kwantum voor Planck nog een "ad hoc" oplossing en zijn het **Albert Einstein** en **Paul Ehrenfest** die het begrip kwantum als eersten korrekt begrijpen als diskontinue energienivo's $E=nh\nu$. Hierin is $h\nu$ een energiekwantum met $h = 6.626176 \times 10^{-34}$ Js de konstante van Planck, ν de frekwentie en $n \in \mathbb{N}$. Einstein verwerpt het kwantum met de opmerking dat het niet is omdat bier in literflessen verkocht wordt, er geen andere volumes van bier bestaan.

In 1907 noemt **Jules Henri Poincaré** tijdens het Solvay-kongres de natuurkunde volgens Newton, Maxwell en de relativiteitstheorieën de "oude fysika" en de kwantummechanika de "nieuwe fysika".

Louis Victor prince de Broglie berekent de golflengte van het elektron, en dus voor het eerst van iets wat tot dan toe steeds als enkel maar materie werd beschouwd: $\lambda=h/p$ waarin h de konstante van Planck is en p de impuls.

Het onzekerheidsprincipe van **Werner Heisenberg** (1901-1976) stelt dat men van een deeltje ofwel de positie ofwel de snelheid nauwkeurig kan bepalen maar niet beiden tegelijkertijd. Aangezien zowel de positie als de impuls nodig zijn om de baan van een deeltje te voorspellen, wordt de toekomstige positie van een deeltje onvoorspelbaar. De golffunktie van **Erwin Schrödinger** (1887-1961) geeft echter voorspelbare waarschijnlijkheden (die niet als een statistisch gegeven maar als een fundamenteel natuurgegeven genterpreteerd worden) waar men een deeltje kan aantreffen.

Albert Einstein verzette zich tegen dit probalistische aspekt met zijn bekende uitspraak "*Gott würfelt nicht.*" Bovendien staat de kwantummechanika toe dat ruimtelijk gescheiden deeltjes elkaar ogenblikkelijk beïnvloeden. De EPR-paradox van Einstein, Podolsky en Rosen toont aan dat de kwantumfysika niet kompatibel is met de relativiteitstheorieën, door aan te tonen dat het kwantumfysisch mogelijk is dat gebeurtenissen op verschillende de plaatsen een onmiddellijke invloed op mekaar hebben. Dit is in tegenspraak met het beeld van kausaliteit die zich met maximaal de lichtsnelheid voortplant. Sindsdien hebben eksperimentele metingen bevestigd dat er zich niet-lokale verschijnselen voordoen. De voornaamste uitdaging waar de natuurkunde nu voor staat is dat haar twee grote theorieën, de algemene relativiteitstheorie en de kwantummechanika, moeilijk verenigbaar zijn.

Er zijn verschillende theorieën die proberen de relativiteitstheorieën en de kwantummechanika met elkaar te verzoenen. Uit de Kaluza-Klein[147] theorie zijn onder meer de superzwaartekracht-, de supersnaar[148]- en recentelijk de braan[149]- theorieën ontstaan. Deze theorieën zijn zeer spekulatief en

---

142 Licht is een golf met golflengte $\lambda=c/\nu$ waarin ν de frekwentie is en c de lichtsnelheid

143 [OH 830]

144 [OH 861]

145 De term "wavicle" is een samentrekking van "wave" en "particle" en drukt dit dubbele aspekt uit.

146 Thomas Kuhn, "Black-body theory and the quantum discontinuity, 1894-1912", 1979

147 Gunnar Nordström (in 1914), Theodr Kaluza (in 1919) en Oscar Klein (in 1926) voerden een vijfde dimensie in.

148 Snaren in tien dimensies, waarvan er zes "opgerold" zijn. Zie [HS]. (John Schwartz, Joel Schrek, Edward

worden niet algemeen aanvaard. Eén van de problemen met deze theorieën is de enorme hoeveelheid energie[150] die nodig zou zijn om ze te verifiëren of falsifiëren.

De benadering vanuit de kwantumlogika die haar wortels heeft bij **Von Neumann** en **Birkhoff** stapt af van de traditionele booleaanse algebra en vervangt die door rooster-algebra in een Hilbertruimte waar verschillende elkaar uitsluitende toestanden, zoals "spin up" en "spin down", orthogonaal op elkaar staan. Bijvoorbeeld in de Operationele Quantum Logika (OQL) naar **J.M. Jauch** en **C. Piron**: "*call e1 and e2 orthogonal, written e1e2, if there exists a definite experimental project a such that a is certain for e1 and impossible for e2.*"[151]

Witten...)

[149] Een braan is een meerdimensionaal membraan waartussen supersnaren bevestigd worden. (Stephen Hawking...)

[150] De Planck energie: 10^{19} miljard elektronvolt [HS 178]

[151] [LPPSDP 47]

1.14. Tijd en ruimte in de logika

De klassieke formele logika bevindt zich in een Eleatische wereld waarbinnen er geen verandering en geen tijd bestaat. Een stelling is waar of onwaar, ongeacht van wanneer of op welke plaats ze geponeerd wordt. De logika van Aristoteles, die het bestaan van een dergelijke wereld verwierp, speelt zich af in de werkelijke wereld. In de Aristoteliaanse logika kan er niet gesproken worden over onbestaande entiteiten[152] zoals Pegasus het vliegende paard of het absolute nulpunt[153].

De tijd en ruimte werden sinds de oudheid en doorheen de middeleeuwen als modaliteiten beschouwd. Deze modaliteiten werden later geformaliseerd in het werk van onder meer Kripke, die een semantiek om modale operatoren te beschrijven invoert, en Prior, die vooral op temporele logika werkte. Hiervoor werd beroep gedaan op de vele-werelden theorie van Leibniz en op de gerichte verzamelingen[154] van Euler. Prior ontwerpt een tijdsvertakkingslogika, die verder uitgewerkt wordt door onder meer Thomasson en Nuel Belnap.

Logici zijn geïnteresseerd in mogelijke werelden als voorstellingswijze[155] van hoe bepaalde gebeurtenissen verlopen of zouden kunnen verlopen omdat het een formele analyse van zinnen die het woord "zou" bevatten in de zin van "het zou morgen kunnen regenen" of "Indien ik gisteren geweten had dat het vandaag regent, dan zou ik toch een paraplu gekocht hebben". Indien van een logische stelling kan aangetoond worden dat ze waar is in elke mogelijke wereld, dan is ze waar en als aangetoond kan worden dat ze in geen enkele mogelijke wereld waar is, dan is ze onwaar[156].Ook modaliteiten zoals waarschijnlijkheden kunnen vanuit de voorstelling van de mogelijke werelden begrepen worden.

In een eerste benadering kunnen tijd en ruimte logisch als op dezelfde manier behandeld worden. Bovenop die topologische logika moeten er beperkingen opgelegd worden die eigen zijn aan de tijd. Hiervoor worden de modale operatoren H "is tot nu toe altijd waar", G "is vanaf nu altijd waar", P "het is waar geweest" en F "het zal waar zijn in de toekomst". Hierbovenop komen dan, indien er keuzepunten zijn, de eigenschappen de tijd te vertakken. Deze axioma's staan in bijlage 3.

---

[152] Deze voorbeelden komen uit de hoorcolleges logika van prof. Van Bendegem.

[153] Het absolute nulpunt is een limiet-toestand die nergens in de natuur kan voorkomen.

[154] Gerichte verzamelingen behoren tot de best bestudeerde strukturen, onder meer omdat ze zeer bruikbaar zijn in de studie van processen en in de informatika. Euler ontwierp de grafentheorie om het probleem van de zeven bruggen van Koningsberg op te lossen.

[155] Men kan alternatieve werelden ook ontologisch als reëel beschouwen, zoals in bepaalde interpretaties van de kwantummechanika. Zie ook de romans "Het kongres" en "Solaris" alsook verschillende kortverhalen van Stanislav Lem.

[156] Hier wordt vanuit gegaan dat de vele werelden een logisch gesloten ruimte vormen; in die zin dat er geen werelden bestaan waarin een uitspraak noch waar, noch onwaar is. Hoewel Nuel Belnap ook gewerkt heeft rond meer-waardige logika (meer bepaald een vierwaardige logika waarin de logische waarden {0} voor onwaar, {1} voor waar, {} voor noch onwaar, noch waar en {0,1} voor de parakonsistente toestand zowel waar als onwaar. Deze interpretatie ligt dan dicht bij de Indische logika zoals die in de aan de Vedanta verwante logika voorkomt. Een toestand {} is bruikbaar (of nodig) om verandering en dus tijd uit te drukken ("ik weet nog niet of het waar is of niet, maar morgen weet ik het wel"), een toestand {0,1} om onderscheid en dus ruimte uit te drukken ("Hier is dat niet waar, maar ginder wel")), wordt dit niet gebruikt in tijds- of tijdruimte-vertakkingen. In deze verhandeling wordt er echter trouw gebleven aan de principes van de non-kontradiktie en het uitgesloten derde. Zie ook het werk van Graham Priest betreffende parakonsistente logika.

Hoofdstuk 2: Axiomatieken voor de speciale relativiteitstheorie

"*De ouden beschouwden wiskunde*
als de overgang van fysika naar metafysika of natuurlijke theologie,
en ze hadden gelijk."
G. W. Leibniz, brief aan Samuel Mason, 1716

2.1. De ordinale axiomatisering van de tijdruimte

Aangezien er een bovengrens aan de snelheid is, geldt deze bovengrens ook voor de kausaliteit: in de Minkowski tijdruimte kan er geen signaal sneller dan het licht gaan, laat staan dat materie dat zou kunnen. Er kan dus een kausale orderelatie gedefinïeerd worden.

In 1914 publiceert **Alfred Arthur Robb**[157] (1873-1936) zijn boek "A Theory of Time and Space"[158] waarin voor het eerst een axiomatische opbouw van de Minkowskiruimte op basis van één orderelatie "after" (na) gepresenteerd wordt.

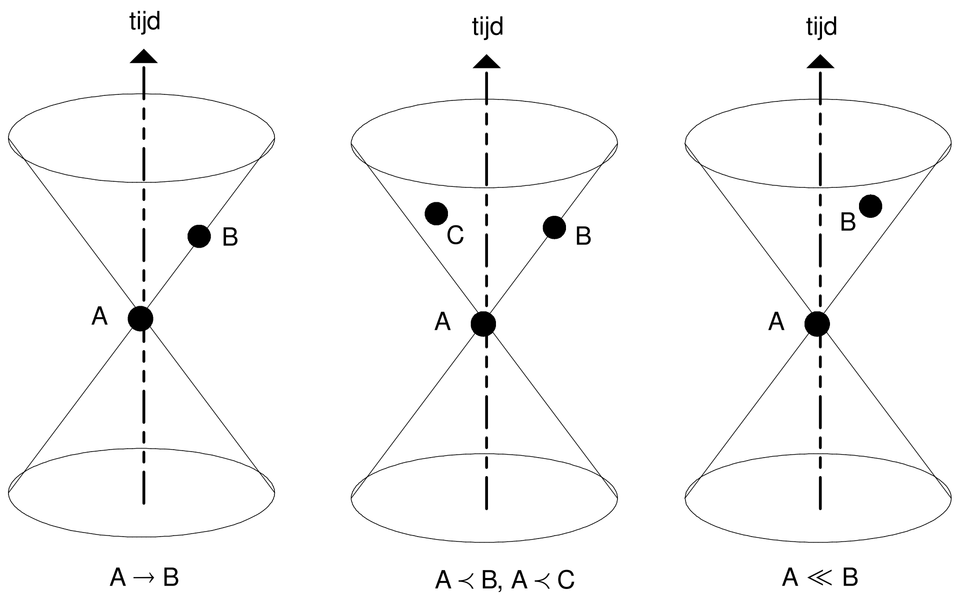
De speciale relativiteitstheorie kan vanuit het begrip gelijkheid, wiskundig uitgedrukt in een ekwivalentierelatie (transitief, symmetrisch en reflexief), begrepen worden. Het relativiteitsbeginsel gaat er van uit dat ruimte en tijd homogeen zijn. De wetten van Newton en Maxwell en de afstand zijn invariant: ze blijven behouden door de relativistische transformaties. Historisch is het vanuit deze gelijkheidsbegrippen, zoals in deel I van deze verhandeling beschreven, hoe de speciale relativiteitstheorie ontstaan is.

Een alternatief is niet uit te gaan van een ekwivalentierelatie maar van een orderelatie (transitief, asymmetrisch en anti-reflexief) om de Minkowskiruimte te konstrueren. De ontdekking van Robb is dat de Minkowski tijdruimte kan opgebouwd worden vanuit één enkele temporele of kausale relatie. De Euklidische ruimte, daarentegen, heeft twee primitieve relaties nodig voor haar konstruktie. Bovendien kan, zoals **Tarski** in 1935 en **Robinson** in 1959 ontdekten, de Euklidische ruimte niet volledig beschreven worden door enkel binaire relaties te gebruiken.

Lichtkegels kunnen op drie manieren gedefinïeerd worden met behulp van binaire orderelaties:

1) Op basis van het oppervlak van de lichtkegel, met behulp van de relatie $\rightarrow$ die zegt dat als $A \rightarrow B$ er een lichtstraal van A naar B gaat. Dit drukt een lichtachtige relatie uit.
2) Op basis van wat er binnen in of op het oppervlak de lichtkegel ligt, met behulp van de relatie $\prec$. Dit drukt een licht- of tijdachtige relatie uit.
3) Op basis van de binnenkant van de kegel met behulp van de relatie $\ll$. Dit drukt een tijdachtige relatie uit.

[157] De bespreking van het werk van Robb is gebaseerd op sekundaire literatuur: [ST&EM], [OSG], [IAM] en [COS].
[158] Gereviseerd in 1936 als "Geometry of Time and Space".



Figuur 15: De verschillende binaire orderelaties die een lichtkegel met oorsprong A definiëren. Deze relaties kunnen gelezen worden als "A kan B (of C) kausaal beïnvloeden."

Zodra één van deze drie relaties gedefinïeerd is, kunnen de andere twee op basis daarvan ingevoerd worden: de lichtkegels zijn zowel door hun oppervlak als door hun inhoud (met of zonder inbegrip van het oppervlak) bepaald.

De relatie "after" of "na" die Robb gebruikt is het omgekeerde van $B \prec A$, bijgevolg kan, "A na B" begrepen worden als "A kan kausaal beïnvloed worden door B." Het probleem met de axiomatiek van Robb is dat ondanks de eenvoud van deze relatie de axioma's zeer ingewikkeld zijn.

De stelling van **Aleksandrov**[159]-**Zeeman**[160]-**Hua** toont dat indien de Minkowski-tijdruimte meer dan één ruimteachtige dimensie heeft, de groep van bijekties die de partiële orderelatie en haar konverse relatie bewaart de Lorentzgroep is. De sleutel tot hun argumentatie is de struktuur van de lichtstralen: het zijn rechten die parallel zijn ten opzichte van mekaar.Op het eerste zicht wordt hier weinig aangetoond, aangezien de Minkowski-tijdruimte juist een gevolg is van de relativistische transformaties. De argumentering van Zeeman blijft echter overeind indien de kausale partiële orderelatie op een andere manier dan vanuit de Minkowski-metriek wordt ingevoerd. Kontinuïteit en lineariteit hoeven niet verondersteld te worden: ze volgen uit het feit dat de bijektie de kausale orderelatie behoudt.

Zeeman veronderstelt een Minkowskiruimte met één tijdachtige dimensie en meer dan één ruimteachtige dimensie en een signatuur (+ - ... -), een groep van bijekties die de relatie $\ll$ en haar omgekeerde behoudt.

De bewijsvoering van Zeeman bestaat uit vijf hulpbewijzen:

- Als f and f^{-1} bijekties zijn in Minkowskiruimte, bewaren ze de partiële tijdachtige orde

[159] A.D. Aleksandrov ≡ A.D. Alexandrov .

[160] De versie van Zeeman van de stelling wordt hier gevolgd. De versie van Aleksandrov is ouder, die van Hua jonger.

$\ll$ als en slechts als ze de asymmetrische niet-transitieve lichtachtige relatie $\rightarrow$ bewaren. Dit wil zeggen dat wat geldig is voor kausale beïnvloedbaarheid binnen de lichtkegel ook opgaat voor de kausale beïnvloedbaarheid tussen de lichtstralen zelf.

- Een dergelijk kausaal automorfisme beeldt lichtstralen af op lichtstralen
- Een dergelijk kausaal automorfisme beeldt evenwijdige lichtstralen af op evenwijdige lichtstralen
- Aangezien er meer dan 1 dimensie is, beeldt een kausaal automorfisme dat evenwijdige lichtstralen op evenwijdige lichtstralen afbeeldt deze lineair af. Het is in deze stap dat de kern van de redenering zit.
- Zo een automorfisme beeldt gelijke intervallen van evenwijdige lichtstralen af op gelijke intervallen van evenwijdige lichtstralen. Hieruit volgen dan de relativistische transformaties.

2.2. De axioma's voor de speciale en algemene relativiteitstheorieën van Ray D'Inverno

Het axiomatisch systeem van Ray D'Inverno[161] voor de tijdruimte in de speciale relativiteitstheorie bestaat uit twee axioma's, waarvan het eerste geometrisch en het tweede fysisch is. D'Inverno axiomatiseert het eindresultaat van de analyse van de Minkowski tijdruimte. De axioma's bevatten gevorderde wiskundige begrippen en konstrukties. In tegenstelling tot de andere besproken axiomastelsels is het hier niet de bedoeling om te onderzoeken welke de meest primitieve operatoren en begrippen zijn die men nodig heeft om de tijdruimte op te bouwen, maar wel om een systeem te hebben dat onmiddellijk kan gebruikt worden in de praktijk van de theoretische en wiskundige natuurkunde en in die zin kan onderstaand axiomasysteem ook beschouwd worden als een samenvatting van de eigenschappen van de Minkowski tijdruimte die fysici interesseren. De andere axiomasystemen die besproken zullen worden moeten de eigenschappen van tijdruimte die hier als axioma's geponeerd worden bewijzen op basis van hun primitieve relaties, bijvoorbeeld door de Lorentz-transformaties aan te tonen.

Axioma I voor de speciale relativiteitstheorie:

Ruimte en tijd worden voorgesteld door een vierdimensionele manifold met een symmetrische affiene konnektie Γ^a_{bc} en een metrische tensor g_{ab} zodanig dat:

i. g_{ab} niet-singulair is met signatuur –2;
ii. $\nabla_c g_{ab}=0$;
iii. $R^a_{bcd}=0$.

Axioma I bepaalt de geometrie van de Minkowski tijdruimte. Een manifold[162] is een ongeordende verzameling punten waar dan een dimensionaliteit en metriek aan opgelegd kunnen worden. Het bepaalt dat de ruimte affien is. Om deze affiene ruimte metrisch te maken is het nodig dat $\nabla_c g_{ab}$ gelijk aan nul is, waarin ∇_a de kovariante afgeleide is naar de affiene konnectie Γ^a_{bc}.

$R^a_{bcd} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^\varepsilon_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^\varepsilon_{bc}\Gamma^a_{ed}$ is de krommingstensor of de Riemann-Christoffel[163] tensor. Axioma I(iii) zegt dat deze tensor gelijk is aan nul, dus is de ruimte plat (niet-gekromd).

Axioma II voor de speciale relativiteitstheorie:

Er bestaan de volgende bevoorrechte klassen van krommen in de manifold:

i. ideale klokken reizen volgens tijdachtige krommen en meten de parameter τ gedefinïeerd door $d\tau=g_{ab}dx^a dx^b$;
ii. vrije deeltjes reizen langs tijdachtige geodetische lijnen;
iii. lichdeeltjes reizen langs nullijnen.

Axioma II bepaalt de fysische eigenschappen van de geometrie die volgt uit axioma I. Het eerste deel voert het onderscheid tussen ruimte en tijd in. τ is de "proper time", g_{ab} is de metrische tensor. Het tweede deel bepaalt dat materiële deeltjes met een snelheid die kleiner is dan het licht reizen. Het laatste deel geldt enkel voor lichtdeeltjes, deze zijn massaloos en reizen langs nullijnen[164].

Bovenstaand axiomastelsel kan op eenvoudige wijze worden aangepast om de algemene

[161] [IER 112-114]
[162] De term "Mannigfaltigkeit" is ingevoerd door Riemann en is een soort van variëteit (in de wiskundige betekenis).
[163] [IER 77-87]
[164] "null geodetics".[IER 113]

relativiteitstheorie te bekomen:
het volstaat om Axioma I.iii ($R^a{}_{bcd}=0$) te vervangen door $G^{ab} = \kappa T^{ab}$ met $\kappa = 8\pi G/c^4$:

Axioma I voor de algemene relativiteitstheorie:

Ruimte en tijd worden voorgesteld door een vierdimensionele manifold met een symmetrische affiene konnektie $\Gamma^a{}_{bc}$ en een metrische tensor g_{ab} zodanig dat:

i. g_{ab} niet-singulair is met signatuur –2;
ii. $\nabla_c g_{ab}=0$;
iii. $G^{ab} = \kappa T^{ab}$ met $\kappa = 8\pi G/c^4$.

In dat geval is het niet meer nodig om Axioma II.ii en Axioma II.iii te poneren: de eigenschappen van de geodeten van de lichtdeeltjes en vrije deeltjes zijn reeds gevolgen.

Axioma II voor de algemene relativiteitstheorie:

Ideale klokken vormen een bevoorrechte klasse van krommen in de manifold die reizen volgens tijdachtige krommen en de parameter τ gedefinïeerd door $d\tau=g_{ab}dx^a dx^b$ meten.

2.3. De axioma's voor relativistische tijdruimte van Robert Goldblatt

Goldblatt gebruikt tussenliggendheid[165] als primitief koncept om een affiene ruimte te bouwen en introduceert daarna de metriek met behulp van orthogonaliteit. Door middel van een axioma dat singulaire lijnen uitsluit en twee axioma's betreffende nullijnen maakt hij de ruimte minkowkiaans. Nadien toont hij dat beide primitieven tussenliggendheid en othogonaliteit uit één enkele na-relatie[166] kunnen opgebouwd worden. Deze axiomatiek is beslisbaar en kompleet. Om binnen het kader van de eerste orde logika te blijven wordt voor de kontinuïteit een axiomaschema à la Tarski gebruikt, dat oneindig veel eerste orde kontinuïteitsaxioma's genereert, wat tot gevolg heeft dat het systeem niet-kategorisch is, m.a.w. er bestaan niet-isomorfe modellen.

T_{ROS4} is een theorie waarvan de zinnen deel uitmaken van een taal L_{OS}. T_{ROS4} bevat 8 axioma's om een affiene ruimte[167] te konstueren, 5 axioma's om die affiene ruimte een metrische orde te geven en 3 axioma's om van die metrische orde een Minkowskiruimte te maken. Deze T_{ROS4} en L_{OS} zijn gebaseerd op een eenvoudigere theorie T_{ROF4} en een eenvoudigere taal L_{OF} die nodig zijn voor de konstruktie in axioma AS8 die een eerste ordebepaling van kontinuïteit mogelijk maakt.

De tussenliggendheidsoperator $\mathsf{B}(xyz)$ is een primitieve operator in de axiomatiek van Golfblatt, maar die kan opgebouwd worden vanuit de na-relatie van Robb, op basis van de hulpoperatoren << en λ. De operator << wordt voor lichtlijnen gedefinïeerd in termen van de na-relatie (after) van Robb: $x \ll y \Leftrightarrow \exists z:[z \neq x$ & ~(z na x $\vee$ x na z) & y na x & y na z & $\forall u$:(u na x & u na z $\Rightarrow$ ~y na u)]. Xλy is een afkorting voor $x \neq y$ & $xy \perp xy$ en drukt uit dat er tussen x en y een lichtachtige relatie bestaat. Goldblatt toont aan dat $x \lambda y \Leftrightarrow (x \ll y) \vee (y \ll x)$. De relatie λ is, in tegenstelling tot de na-relatie die een richting aan de tijd geeft, symmetrisch.

$\mathsf{L}(tzu)$ is een afkorting voor "t is kollineair met x en y" en wordt formeel uitgeschreven als de L_{OS}-formule $\mathsf{B}(xyz) \vee \mathsf{B}(yzx) \vee \mathsf{B}(zxy)$. $\mathsf{P}(x_1x_2x_3z)$ is een afkorting voor "z is koplanair met x_1, x_2 en x_3" en wordt formeel uitgeschreven als $\exists y:\varphi$ waarbij φ de disjunktie is tussen de zes formules $\mathsf{L}(x_{\varrho 1}x_{\varrho 2}y)$ & $\mathsf{L}(x_{\varrho 3}yz)$ met ϱ een permutatie van {1,2,3}.

Xy||zw is een afkorting voor $\mathsf{P}(xyzw)$ & $[\forall u:(\mathsf{L}(xyu) \Rightarrow \mathsf{L}(zwu)) \vee \forall u:(\mathsf{L}(xyu) \Rightarrow \sim\mathsf{L}(zwu))]$ en drukt evenwijdigheid uit.

Axioma's voor Affiene ruimten.

AS1. $\mathsf{B}(xyx) \Rightarrow x=y$

Dit axioma zegt dat het enige punt dat tussen zichzelf ligt, dat punt zelf is.

AS2. $\mathsf{B}(xyz)$ & $\mathsf{B}(yzu)$ & $y \neq z \Rightarrow \mathsf{B}(xyu)$

Dit is een vorm van transitiviteit:

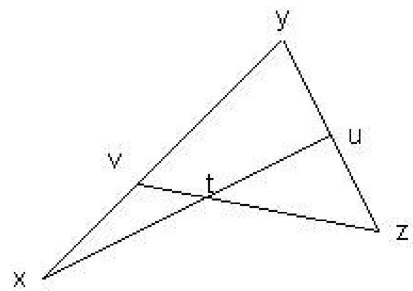
AS3. $\mathsf{B}(xyz)$ & $\mathsf{B}(xyu)$ & $x \neq z \Rightarrow \mathsf{B}(yzu) \vee \mathsf{B}(yuz)$

AS4. $\exists x:[\mathsf{B}(xyz)$ & $x \neq y]$

[165] "betweenness" bij Goldblatt
[166] "after" bij Robb
[167] Goldblatt nummert zijn axioma's voor de affiene ruimte gewoon van 1 tot 8, ik noem ze hier AS1 tot AS8 voor "Affine Spaces".

AS5. $\mathsf{B}(xtu) \,\&\, \mathsf{B}(yuz) \Rightarrow \exists v{:}[\mathsf{B}(xvy) \& \mathsf{B}(ztv)]$

Dit axioma is een versie van de wet van Pasch, die zegt dat als een rechte één zijde van een driehoek snijdt, ze ook een andere zijde van die driehoek snijdt.



Figuur 16: De "wet van Pasch" volgens Goldblatt

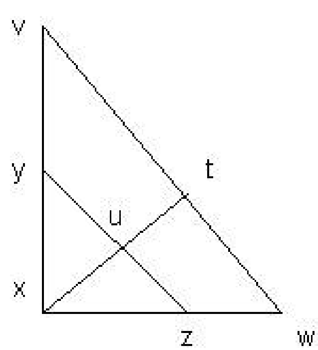
AS6. $\exists x_1 \ldots \exists x_5{:}[\sim\mathsf{TF}(x_1 \ldots x_5) \,\&\forall z{:}\mathsf{FF}(x_1 \ldots x_5 z)]$

$\mathsf{TF}(x_1 \ldots x_5)$ is een three-fold, dit is een afkorting voor $\exists y$: φ waarbij φ de disjunktie is tussen de formules $\mathsf{P}(x_{\varrho 1} x_{\varrho 2} x_{\varrho 3} y)$ & $\mathsf{L}(x_{\varrho 4} yz)$ met ϱ een permutatie van $\{1,2,3,4\}$.
$\mathsf{FF}(x_1 \ldots x_5 z)$ is een four-fold, deze wordt op dezelfde manier gegenereerd als TF met ϱ een permutatie van $\{1,2,3,4,5\}$.

De ruimte wordt gekreëerd door vijf punten, ze is bijgevolg vierdimensionaal.

AS7. $\mathsf{B}(xut) \,\&\, \mathsf{B}(yuz) \,\&\, x \neq u \Rightarrow \exists v \exists w{:}[\mathsf{B}(xyv) \& \mathsf{B}(xzw) \& \mathsf{B}(vtw)]$

Dit is het axioma van "Euklides" in het systeem van Goldblatt.



Figuur 17: Het "axioma van Euklides" volgens Goldblatt

AS8. $\exists z \forall x \forall y{:}[\varphi \& \psi \Rightarrow \mathsf{B}(zyx)] \Rightarrow \exists u \forall x \forall y{:}[\varphi \& \psi \Rightarrow \mathsf{B}(xuy)]$ waarbij φ gelijk welke formule is met x vrij maar y,z en u niet; en waarbij ψ gelijk welke formule is met y vrij, maar niet x,z en u.

Dit is een axiomaschema voor een eerste orde versie van Dedekind-kontinuïteit. Door deze konstruktie, die aan Tarski ontleend is, te gebruiken verkrijgt Goldblatt dat T_{ROS4} in de eerste ordelogika uitgedrukt wordt en bijgevolg kompleet en beslisbaar is. De prijs die betaald wordt is dat T_{ROS4} niet kategorisch is: ze bevat modellen van elke oneindige kardinaliteit.

Axioma's voor Metrisch georde ruimten

Aan de axioma's **AS1-AS8** voor de affiene ruimten, worden volgende axioma's **OS1-OS5** toegevoegd om een metrisch geordende ruimte te konstrueren:

OS1. $xy \perp zw \Rightarrow zw \perp xy$

Symmetrie van de orthogonaliteit: $\perp$ is een primitieve operator die in dit axioma wordt ingevoerd en is een symmetrische relatie tussen vier punten. Goldblatt toont aan dat deze operator $\perp$ kan gekonstrueerd worden vanuit de "after"-relatie van Robb.

OS2. $[\mathsf{P}(xyzw) \Rightarrow xy \perp zw] \vee \exists t[\mathsf{P}(xyzt) \forall u(\mathsf{P}(xyzu) \Rightarrow (xy \perp zu \Leftrightarrow \mathsf{L}(tzu)))]$

In het vlak van de gebeurtenissen x,y en z is xy singulier of anders staat er juist één lijn door z orthogonaal op xy.

OS3. $[xy \perp zw \;\&\; xz \perp yw] \Rightarrow xw \perp yz$

OS4. $[xy \perp yw \;\&\; xy \perp yz \;\&\; \mathsf{P}(yzwu)] \Rightarrow xy \perp yu$

Als xy loodrecht staat op twee lijnen yw en yz door y, dan staat xy loodrecht op alle rechten die door punten gaan die bepaald worden door het vlak door y, z en w.

OS5. $[xy \perp zw \;\&\; zw \| uv] \Rightarrow xy \perp uv$

Als xy orthogonaal staat op zw, dan staat xy orthogonaal op alle lijnen die evenwijdig zijn aan zw.

Axioma's voor Minkowskiruimten

Aan de axioma's **AS1-AS8** voor affiene ruimten en de axioma's **OS1-OS5** voor metrisch geordende ruimten worden de axioma's **M1**-**M3** toegevoegd om een Minkowskiruimte te konstrueren:

M1. $\forall x \forall y \exists w: \sim(xy \perp yw)$

Er bestaan geen singuliere lijnen, dit zijn lijnen die loodrecht staan op alle andere lijnen.

M2. $\exists x \exists y: (x \lambda y)$

Axioma **M2** zegt dat er minstens één nullijn bestaat..

M3. $[x \lambda y \;\&\; z \lambda w \;\&\; xy \perp zw] \Rightarrow xy \| zw$

Er zijn geen snijdende orthogonale nul-lijnen

2.4. De axioma's voor relativistische tijdruimte van John W. Schutz

John W. Schutz[168] tracht in zijn opbouw van de axioma's voor de Minkowskiruimte de axioma's voor de Euclidische ruimte zoals ze uitgewerkt zijn door Hilbert en Veblen te volgen. Het verschil is dat er voor de Euclidische ruimte twee primitieve relaties nodig zijn en er voor de Minkowskiruimte slechts één volstaat. Bij Schutz is dat de ternaire "betweenness" relatie [abc] die geïnterpreteerd kan worden als de gebeurtenis b doet zich voor tussen de gebeurtenissen a en c. De verzameling van gebeurtenissen is $\mathcal{E}$ (voor "events"). Er is een verzameling $\mathcal{P}$ van deelverzamelingen van $\mathcal{E}$. De elementen $\mathcal{P}$ van worden paden genoemd. De verzamelingen $\mathcal{E}$ en $\mathcal{P}$ en de paden vormen samen met de relatie [...] de primitieve ongedefinïeerde basis om de Minkowski tijdruimte te introduceren als $\mathcal{M}$ =<$\mathcal{E}$,$\mathcal{P}$,[...]>. De Minkowski tijdruimte $\mathcal{M}$=<$\mathcal{E}$,$\mathcal{P}$,[...]> zou ook als $\mathcal{M}$ =<$\mathcal{E}$,[...]> kunnen gedefiniëerd worden, en paden zouden nadien gedefiniëerd kunnen worden. Het voordeel van zo een benadering is dat onderstaande axioma's O1 en O5 niet meer nodig zouden zijn aangezien ze zouden opgenomen worden in de definitie van een pad. Schutz heeft deze keuze niet gemaakt omdat hij veronderstelde eigenschappen van paden wil invoeren in de axioma's: indien paden worden gedefiniëerd op basis van de betweenness relatie, dan zou de mogelijkheid van komplexe tijdruimten uitgesloten worden per definitie[169].

De axiomatiek van Schutz is van 2e orde (Kontinuïteitsaxioma), kategorisch, konsistent ten opzichte van de Reële getallen (dus niet beslisbaar), de axioma's zijn onafhankelijk van elkaar.

Axioma's
De axiomatiek van Schutz bestaat uit 15 axioma's die in vier groepen kunnen onderverdeeld worden: de orde-axioma (O1 tot O6), de incidentie-axioma's (I1 tot I7), het isotropie- of symmetrie-axioma (S) en het kontinuïteitsaxioma (C).

Orde-axioma's

O1. Voor gebeurtenissen a,b,c$\in \mathcal{E}$: [abc] $\Rightarrow$ Q$\in \mathcal{P}$: a,b,c $\in$ Q

Dit axioma bepaalt de relatie tussen gebeurtenissen en paden: als b tussen a en c ligt, dan liggen a,b en c op een pad. $\mathcal{E}$ is de verzameling van gebeurtenissen, $\mathcal{P}$ is de verzameling van de paden.

O2. Voor gebeurtenissen a,b,c$\in \mathcal{E}$: [abc] $\Rightarrow$ [cba]

Als b tussen a en c ligt, dan ligt b ook tussen c en a.

O3 Voor gebeurtenissen a,b,c$\in \mathcal{E}$: [abc] $\Rightarrow$ a,b en c zijn verschillend.

O4. Voor verschillende gebeurtenissen a,b,c,d$\in \mathcal{E}$: [abc] en [bcd] $\Rightarrow$ [abd]

Dit is een vorm van transitiviteit.

O5. Voor elk pad Q$\in \mathcal{P}$ en elke drie verschillende gebeurtenissen a,b,c$\in$Q:
[abc] of [bca] of [cab] of [cba] of [acb] of [bac]

[168] Schutz heeft verschillende axiomasystemen voor de Minkowski tijdruimte, hier volg ik [IAM]. Een oudere axiomatiek is uitgewerkt in [FSR].
[169] [IAM 226]

O6. Als Q, R en S verschillende paden zijn die kruisen op gebeurtenissen $a \in Q \cap R$, $b \in Q \cap S$, $c \in R \cap S$ en als
(i) er een gebeurtenis $d \in S$ is zodanig dat [bcd], en
(ii) er een gebeurtenis $e \in R$ en een pad T door zowel d als e zodanig dat [cea]
dan kruisen T en Q in een gebeurtenis f dat behoort tot de eindige keten [a..f..b]

Kollineariteit

Incidentie-axioma's

I1. $\mathcal{E}$ is niet ledig

Er bestaat minstens één gebeurtenis.

I2. Voor elke twee verschillende gebeurtenissen $a,b \in \mathcal{E}$ zijn er paden R,S zodanig dat $a \in R$, $b \in S$ en $R \cap S$.

Dit is het axioma van de verbondenheid: niet alle gebeurtenissen kunnen worden verbonden door een pad (omdat ze ruimtelijk gescheiden kunnen zijn), maar het is wel steeds mogelijk om twee snijdende paden te trekken zodanig dat elk pad een van die gebeurtenissen bevat.

I3. Voor elke twee verschillende gebeurtenissen is er ten hoogste één pad dat beiden bevat.

Dit is het axioma van uniciteit van paden.

I4. Indien $\mathcal{E}$ niet ledig is, bestaat er ten minste één 3-SPRAY.

Een spreiding van paden $SPR[x] \overset{def}{=} \{R: R \ni x, R \in \mathcal{P}\}$ is de verzameling van alle paden door gebeurtenis x. De verzameling van alle gebeurtenissen die deel uitmaken van paden door gebeurtenis x is $spr[x] \overset{def}{=} \{R_y: R_y \in R, R \in SPR[x]\}$. Indien drie paden Q,R en S tot een spreiding behoren, zijn ze afhankelijk van mekaar indien er een pad bestaat dat geen deel uitmaakt van de spreiding maar met elk van de drie paden een gebeurtenis gemeen heeft. Indien er zo geen pad bestaat, dan zijn de paden onafhankelijk. Een spreiding is een 3-SPRAY indien het vier onafhankelijke paden bevat en alle paden van de spreiding afhankelijk zijn van deze vier paden. Het bestaan van een 3-SPRAY brengt een driedimensionele hyperbolische ruimte voort. Deze driedimensionele ruimte kan worden voorgesteld in een vierdimensionele ruimte met de bijkomende randvoorwaarde op de afstand. In beide gevallen zijn er drie vrijheidsgraden.

I5. Voor elk pad Q en elke gebeurtenis $b \notin Q$, bevat de onbereikbare verzameling $Q(b,\varnothing) \overset{def}{=} \{x: \text{er is geen pad dat b en x bevat}, x \in Q\}$ ten minste twee gebeurtenissen.

Dit axioma maakt het systeem non-galileïsch: in tegenstelling tot een absolute meetkunde, is er in tijdruimte een verzameling van onbereikbare gebeurtenissen, met name die gebeurtenissen die ruimtelijk van elkaar gescheiden zijn.

I6: Gegeven een pad Q, een gebeurtenis $b \notin Q$, en verschillende gebeurtenissen $Q_x, Q_z \in Q(b,\varnothing)$, bestaat er een eindige keten $[Q_0 ... Q_n]$ met $Q_0=Q_x$ en $Q_n=Q_z$ zodanig dat voor alle $i \in \{1,2,...,n\}$ geldt:

$Q_i \in Q(b,\varnothing)$

$[Q_{i-1}\ Q_y\ Q_i] \Rightarrow Q_y \in (b,\varnothing)$

Dit axioma zorgt ervoor dat de gebeurtenissen van de onbereikbare verzameling verbonden zijn.

I7: Gegeven een pad Q, een gebeurtenis $b \notin Q$ en gebeurtenissen $Q_x \in Q \backslash Q(b,\emptyset)$ en $Q_y Q \backslash Q(b,\emptyset)$, bestaat er een eindige keten $[Q_0 \ldots Q_m \ldots Q_n]$ met $Q_0=Q_x$, $Q_m=Q_y$ en $Q_n \in Q \backslash Q(b,\emptyset)$.

Begrensdheid van de onbereikbare verzameling.

Symmetrie- of isotropie-axioma S

S: Als Q,R,S verschillende paden zijn die snijden in een gebeurtenis x en als $Q_a \in Q$ een gebeurtenis verschillend van x is zodanig dat $Q(Qa,R,x,\emptyset)=Q(Qa,S,x,\emptyset)$; dan
bestaat er een afbeelding $\theta:\mathcal{E}\rightarrow\mathcal{E}$
die een bijektie $\Theta:\mathcal{P}\rightarrow\mathcal{P}$ voortbrengt
zodanig dat
de gebeurtenissen van Q invariant zijn, en
$\Theta:R\rightarrow S$.

$Q(Q_a,R,x,\emptyset)\stackrel{\text{def}}{=}\{Qy:[x\ Q_y\ Q_a]$ en $\exists R_w \in R$ zodanig dat $Q_a,Q_y \in Q(R_w,\emptyset)\}\}$ is de onbereikbare deelverzameling van Q vanuit Q_a via R voor twee verschillende paden Q en R die snijden in x. Dit axioma wordt gebruikt om een isomorfie te konstrueren tussen de driedimensionele hyperbolische ruimte die door de 3-SPRAY van axioma **I4** voortgebracht wordt en een konvekse verzameling rechte lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^4$. Deze isomorfie wordt ook gebruikt om de konsistentie ten opzichte van de verzameling van de reële getallen en de stellingen van de rekenkunde aan te tonen.

Kontinuïteitsaxioma C

C: Elke oneindige begrensde keten heeft een meest nabije grens

$\beta=\{Q_b$: $i<j \Rightarrow [Q_iQ_jQ_b]$; $Q_i,Q_j,Q_b \in Q\}$ is de verzameling van grenzen van de oneindige keten $[Q_0\ Q_1 \ldots]$ van gebeurtenissen in $Q\in\mathcal{P}$. Indien β niet ledig is, dan is de keten begrensd. Indien er een grens Q_b bestaat zodanig dat $\forall Q_{b'} \in \beta\backslash\{Q_b\}$: $[Q_0Q_bQ_{b'}]$, dan is Q_b de meest nabije grens.

2.5. Branching Space-Time

De "Branching Space-Time" theorie (afgekort BST, te vertalen als "tijdruimtevertakkingen") van **Nuel Belnap** is een protofysische theorie die als bedoeling heeft om aan te tonen dat indeterminisme houdbaar is binnen de relativiteitstheorieën. Belnap werkt verder op eerder werk van Prior en Thomasson over tijd-vertakkingen (BT, branching time). Belnap presenteert zijn eigen BT systeem in "Facing the Future: Agents and Choices in Our Indeterminist World"[170]. De BST theorie is een dergelijke vertakkingstruktuur in een relativistische kontext: "[BST] *takes seriously that physical and human happenings are local events rather than universe-wide. We nevertheless remain here with branching time, since no study known to us has attacked the presumably more difficult problem of understanding agency in anything like branching space-time.*"[171]

Aangezien tijdruimte één vierdimensionale ruimte is, een zogenaamd "block universum", zou men kunnen argumenteren dat - als de vierdimensionele kurve van een voorwerp (met inbegrip van een mens) bekend is - het heden, verleden en toekomst vastliggen. Een god zou een vierdimensionaal perspektief kunnen hebben en zo alles tegelijkertijd zien. Met BST wil Belnap hiertegen aantonen dat er geen logische onverenigbaarheid is tussen de relativiteitstheorie en indeterminisme. Een verdere uitwerking van wat Belnap bedoelt met indeterminisme vinden we in [FF]. Hier werkt hij een BT struktuur uit die niet-relativistisch is en waarop agenten die keuzes maken bewegen. De struktuur veronderstelt indeterminisme a priori, maar anderzijds kan volgens Belnap indeterminisme enkel behandeld worden binnen een dergelijke struktuur: "*It is, we think, almost impossible to speak clearly and accurately about indeterminism except in the framework of a rigorously fashioned theory such as the one we propose.*"[172] Om de agent en de handeling in een volzin uit mekaar te halen wordt in [FF] de "stit"-operator ingevoerd die staat voor "...sees to it that...", te vertalen als "...zorgt er voor dat...", "...doet...", "...is er voor verantwoordelijk dat..." of "...laat ... gebeuren", maar dan zonder de morele of andere konnotaties die hieraan verbonden zouden kunnen worden. Deze agenten kunnen dan keuzes maken tussen verschillende gebeurtenissen: "*Our project assumes the indeterminism of the causal order, and it assumes that choices are therefore not predetermined.* [...] *Our strategy is to concentrate almost exclusively on the objectively causal side of indeterminism and agency, which already presents enough difficulties without bringing in noncausal concepts. We therefore lay aside many deeply important aspects of agency and choice that involve intentions, propositional attitudes, or other mental phenomena.*"[173]

De BST theorie is een protofysische theorie. De twee opmerkelijkste verschil met de eerder gepresenteerde axiomastelsels voor de Minkowskiruimte is de afwezigheid van metriek en de aanwezigheid van modaliteit . De Minkowski-tijdruimte, maar ook de algemeen relativistische tijdruimte, zijn modellen van BST: "*The manifold of point events is called space-time. The idea of viewing space-time as a set of point events subject to a causal order seems to carry over from special to general relativity. For illustrative purposes, however, it is often useful to keep to special relativity, where a particular metric is available. I will use Minkowski space-time to denate this case, leaving plain space-time for general relativistic use.*"[174]

"*For most purposes it suffices to picture each history as a Minkowski space-time, although that*

[170] [FF]
[171] [FF 178]
[172] [FF v]
[173] [FF vii]
[174] [BST 386]

limitation is not postulated."[175]

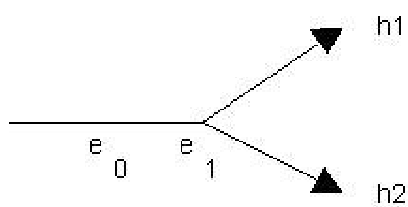
In BST kunnen ook kwantumverschijnselen gemodelliseerd worden, zoals de EPR-paradox[176] en het GHZ[177]-theorema[178], een versie van het theorema van Bell zonder ongelijkheden. Een vereniging van BST en de "Outcomes in Branching Time"[179] is ondernomen door [180]. T. Kowalski en T. Placek, ook met het oog op verdere bruikbaarheid voor de kwantumtheorie.

In tegenstelling tot de wereld van Wittgenstein, die alles is wat het geval is[181], bestaat "Onze Wereld" van Belnap uit alle gebeurtenissen die zich voordoen, kunnen voordoen zullen voordoen of zich hadden kunnen voordoen.

Een keten E is gericht indien $\forall e_0 \forall e_1:[e_0,e_1 \in E \Rightarrow \exists e_2:(e_2 \in E \;\&\; e_0 \leqslant e_2 \;\&\; e_1 \leqslant e_2)]$.

h is een geschiedenis indien h een maximale gerichte deelverzameling is van OW.

De verzameling van keuzepunten $h_1{}^\wedge h_2 \stackrel{def}{=} \text{maxima}(h_1 \cap h_2)$, waarbij h_1 en h_2 geschiedenissen zijn. Indien e een element is van $h_1{}^\wedge h_2$ dan wordt er gezegd dat h_1 en h_2 orthogonaal staan op mekaar in e: $h_1 \perp_e h_2$. Deze orthogonaliteit verschilt van de orthogonaliteit zoals eerder besproken. Ten eerste is de orthogonaliteit van BST een lokale eigenschap in een gebeurtenis: twee geschiedenissen staan orthogonaal op mekaar in de gebeurtenissen of gebeurtenissen waarin ze splitsen, wat zich vertaalt in de subscript bij het orthogonaliteitssymbool. In de figuur hieronder, staat h_1 orthogonaal op h_2 in e_1, maar niet in e_0 of in gebeurtenissen die voorbij het keuzepunt liggen:



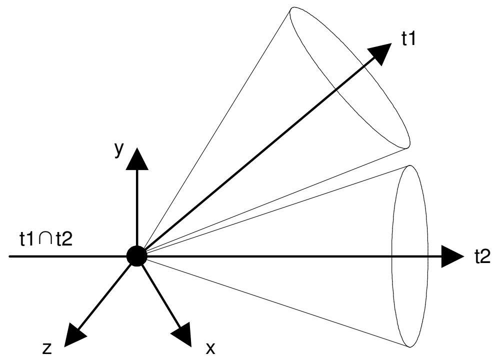
Figuur 18: $h_1 \perp_{e1} h_2$

Ten tweede is het in BST, per definitie, onmogelijk dat een geschiedenis orthogonaal staat op zichzelf, waar in de Minkowski-meetkunde lichtstralen orthogonaal staan op zichzelf. Het is dus duidelijk dat de orthogonaliteit tussen geschiedenissen van Belnap niet met die in bijvoorbeeld de axiomatiek van Goldblatt die behouden wordt door een verschuiving mag worden verward.

Een Minkowski-BST zou als volgt kunnen voorgesteld worden: in onderstaande tekening staan de ruimtelijke assen x, y en z loodrecht op elkaar en ook loodrecht op de tijdsas $t = t_1 \cup t_2$ en ook op t_1

175 [NFBST 4]
176 [BST], [NFBST]
177 GHZ = Greenberger, Horne, Shimony & Zeilinger.
178 [BSTGHZ]
179 Belnap, N. (1995), 'Various notes on outcomes in branching histories,' unpublished manuscript, Pittsburgh University.
180 "OBST": Kowalski, T., Placek, T. (1999), 'Outcomes in branching space-time and GHZ-Bell theorems,' *British Journal for the Philosophy of Science 50,* pp. 349–375.
181 "*Die Welt ist alles, was der Fall ist.*" [TLP 12]

en t_2 afzonderlijk in de "traditionele" betekenis van orthogonaliteit. In een keuzepunt staan t_1 en t_2 orthogonaal op mekaar volgens de definitie van Belnap.



Figuur 19: Minkowski-BST

Een BST struktuur $<W,\leqslant>$ is ...

Een Minkowski tijdruimte-vertakking is een model van Onze wereld waarin elke geschiedenis een Minkowski tijdruimte is: *"Definition 16: A Minkowski branching space-time is a model of Our World in which each history is a Minkowski space-time (in the standard sense found in the literature)."*[182]

Postulaten[183]

B1. $OW \neq \emptyset$

Nontrivialiteit of existentie: Onze Wereld bevat minstens één gebeurtenis[184]. De verzameling Onze Wereld is de eerste primitieve van BST die Belnap introduceert in de grammatika van BST.

B2. $\forall e \in OW$: $e \leqslant e$

$\forall e_0,e_1,e_2 \in 0W$: $(e_0 \leqslant e_1$ & $e_1 \leqslant e_2) \Rightarrow e_0 \leqslant e_2$

$\forall e_0,e_1$: $(e_0 \leqslant e_1$ & $e_1 \leqslant e_0) \Rightarrow e_0 = e_1$

De partiële binaire orderelatie $\leqslant$ wordt gelezen als "ligt in het kausale verleden van" en is reflexief, transitief en antisymmetrisch. Deze orderelatie is de tweede primitieve die Belnap introduceert in de grammatika van BST. Uit deze orderelatie $\leqslant$ kan de relatie$<$ als volgt geïntroduceerd worden: $e_0 < e_1 \Leftrightarrow e_0 \leqslant e_1$ & $e_0 \neq e_1$.

B3. $\forall e_0$:[e∈OW $\Rightarrow$ ∃e1:(e$\in_1$OW & $e_0 < e_1$)]

182 [BST 399]

183 Ik volg voor de postulaten [NFBST]. De nummering B1 tot B8 is van mij.

184 Belnap noemt de elementen van OW "point events" en gebruikt de term "event" voor verzamelingen van point events. Konsistent met de terminologie in de rest van deze verhandeling vertaal ik "point event" als gebeurtenis en "event" als verzameling van gebeurtenissen.

Nondetermination: er bestaan geen terminale elementen in Onze Wereld. => $h \wedge h = \emptyset$.

B4. $\forall e_0, e_2: e_0 < e_2 \Rightarrow \exists e_1: [e_0 < e_1 \ \& \ e_1 < e_2]$

Densiteit zoals bij de rationele getallen $\mathbb{Q}$: tussen twee gebeurtenissen ligt er altijd een derde gebeurtenis.

B5. O is een uitkomstketen $\Rightarrow \exists \ \inf(O)$

Infimumpostulaat. Een uitkomstketen is een niet-ledige keten met een ondergrens.

B6. I is een initiële keten $\Rightarrow \exists \ \sup_h(I)$

Supremumpostulaat: elke initiële keten (dit is een niet-ledige keten met een bovengrens) heeft een supremum in elke geschiedenis waarvan de initiële keten een deelverzameling is.

B7. Gegeven twee initiële ketens en twee geschiedenissen, dan wordt de orde van de respektieve suprema behouden wanneer de geschiedenissen variëren: wanneer $I_1 \cup I_2 \subseteq h_1 \cap h_2$ dan $\sup_{h1}(I_1) < \sup_{h1}(I_2) \Leftrightarrow \sup_{h2}(I_1) < \sup_{h2}(I_2)$ en $\sup_{h1}(I_1) = \sup_{h1}(I_2) \Leftrightarrow \sup_{h2}(I_1) = \sup_{h2}(I_2)$.

B8. Indien een uitkomstketen bevat is in één geschiedenis maar niet in een andere, dan is er in het strikte verleden van de keten een keuzepunt voor deze twee geschiedenissen.

B8. Prior causal order / prior choice postulate

Principe. Common prior causal order principle

Dit principe is in tegenstelling met EPR.

Hoofdstuk 3: bespreking en konklusies

All our knowledge, both of time and place, is essentially relative.
When a man has acquired the habit of putting words together,
without troubling himself to form the thougts which ought to correspond to them,
it is easy for him to frame an antithesis between this relative knowledge,
and to point out our ignorance of the absolute position as an
instance of the limitation of our faculties.
Any one, however, who will try to imagine the state of a mind
conscious of knowing the absolute position of a point
will ever after be content with our relative knowledge.
James Clerk Maxwell[185], "Matter and motion", 1876

3.1. Bespreking van de essentiële begrippen

Afgezien van de twee basisprincipes (1) de absolute lichtsnelheid en (2) het relativiteitsprincipe die meestal worden aangehaald in de definiëring van de speciale relativiteitstheorie en de waarnemer met klok en meter, zijn er een aantal begrippen en strukturen die nodig zijn om de theorie te kunnen formuleren.

3.1.1. Incidentie

Incidentie gaat over de bouwstenen van een model, het is existentie en meer: het is bijvoorbeeld ook deelname aan verzamelingen (een punt op een rechte, een rechte in een vlak, een gebeurtenis of een pad in tijdruimte, twee snijdende rechten hebben een punt gemeen...) en bepaalt reeds een deel van de struktuur van het model. Euklides heeft incidentieaxioma's, dit begrip is later verder uitgewerkt door onder meet Hilbert, Veblen en Moore voor de Euklidische meetkunde.

De punten uit de Euklidische meetkunde enerzijds en de momenten in de tijd anderzijds worden versmolten tot gebeurtenissen in tijdruimte.

3.1.2. Orde

De studie van orderelaties gaat terug tot de relatietheorie van Leibniz en het probleem van de zeven bruggen van Euler. Orde werd als wiskundig begrip uitgewerkt door Pasch, Peano, Pieri, Hilbert, Veblen en anderen. In de elementen van Euklides komt dit begrip niet voor: "*Apart from the use of hidden assumptions, and attempts to define what should be taken as primitive notions, the major shortcoming is the absebce of a theory of relative position (order) of points. This lacuna has allowed the production from time to time of such fallacies as Euclidian 'proofs' that all triangles are isosceles, and that there exist triangles with two right angles etc.*"[186]

De relativistische tijdruimte kan opgebouwd worden vanuit een enkele orderelatie, daarom speelt orde voor de relativiteitstheorieën hier een belangrijkere rol dan in het Euklidische systeem. De axiomatiek van Alfred Arthur Robb en de stelling van Alexandrov-Zeeman-Hua tonen dit aan. Tarski heeft aangetoond dat dit in het Euklidische systeem onmogelijk is.

---

185 [M&M 12]
186 [OSG 161]

3.1.3. Gelijkheid

Er zijn vele verschillende dingen die gelijkheid genoemd kunnen worden. Elke wiskundige ekwivalentierelatie (reflexief, symmetrisch en transitief) valt onder deze noemer. Euklides bedoelt "kongruentie" (geometrisch gelijkheid: gelijke hoeken, gelijke lengten, figuren die op mekaar kunnen gelegd worden) wanneer hij in de gemeenplaatsen van de Elementen "gelijkheid" invoert.

De belangrijke gelijkheden in de speciale relativiteitstheorie zijn in de eerste plaats het invariantieprincipe (gelijkheid van natuurwetten), de homogeneiteit van tijdruimte (ieder punt kan als oorsprong beschouwd worden) en de isotropie (er bestaat geen bevoorrechte richting), maar deze zijn niet nodig om de relativiteitstheorie te axiomatiseren en verliezen voor een stuk zelfs hun betekenis in de relativiteitstheorie (zoals bijvoorbeeld "simultaneïteit"): "*Sameness is peculiarly characteristic of space. We think of space as being homogeneous, isotropic, and, usually, metrically amorphous. Every point in space is like every other point, every direction in space is like every other direction, and there is no natural given spatial metric. Time and causality are not so samey as space. 'Before' is not the same as 'after', and causes are not the same as effects. Nevertheless, in other respects time and causality do manifest important samenesses. Time is homogeneous -origin indifferent- and appears to have no natural metric; and it is characteristic of physical causes that they should be repeatable, that is, that the same cause should be followed by the same effect. For these reasons, as well as its being Einstein's own approach, it is natural to use sameness as the key to the Special Theory. But there are difficulties. Sameness is not as simple as it seems. It seems to be a two term relation, but is in fact a three-term one. The question 'Am I the same as you?' cannot be answered until we have explained in what respect the sameness is to be assessed.* [...] *Once we have specified the respect – language, nationality, sex, age, height or weigth – we can characterize 'being the same as' by its formal properties. Formally it is an 'equivalence' relation* [...] *In physics there are many concepts which express some idea of sameness: similar, simultaneous, equal, equivalent, equipollent, isomorphic, isotropic, homogeneous, uniform, featureless, amorphous, invariant, covariant, conservation and symmetry. These concepts are usually best understood in terms of the appropriate equivalence relation, which are less abstract and more readily applied to empirical phenomena.* [...] *Equivalence relations, although important, are always with respect to some particular frame of reference or other.*"[187]

3.1.4. Kontinuïteit

Kontinuïteit is een van de belangrijkste onuitgesproken veronderstellingen in de elementen van Euklides en wordt reeds vanaf de eerste stelling gebruikt. Archimedes heeft als eerste het begrip ingevoerd, het is later verder uitgewerkt door Dedekind.

Alle[188] hier bestudeerde modellen en axiomatieken gaan er van uit dat de ruimte en tijd kontinu zijn en minstens de dichtheid van de rationele getallen $\mathbb{Q}$ hebben: tussen twee willekeurige gebeurtenissen ligt er steeds een derde gebeurtenis.

Kontinuïteit kan niet in eerste-orde predikaten-logika uitgedrukt worden, tenzij met behulp van een axioma-schema zoals ingevoerd door Tarski dat een oneindig aantal kontinuïteitsaxioma's

[187] [ST&EM 29-30]

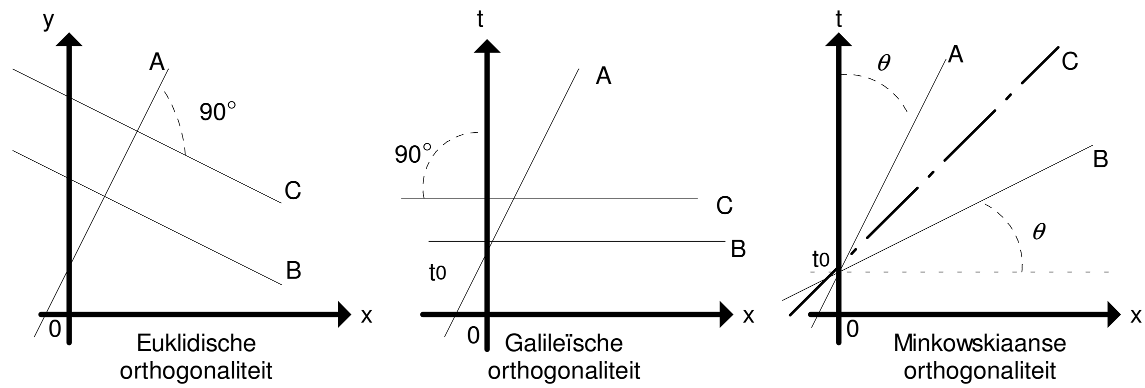
[188] Het zou niet ondenkbaar zijn om een diskontinu of diskreet model van ruimte en tijd te konstrueren, en er zijn verschillende redenen waarom dit interessant zou zijn. Een diskreet model zou bijvoorbeeld de Planck-lengte en Planck-sekonde als minimale afstand kunnen hebben.

genereert.

3.1.5. Orthogonaliteit en dimensionaliteit

De Minkowski-tijdruimte is een vier-dimensionaal kontinuum. Er zijn evenveel dimensies als het aantal rechten in een punt orthogonaal op elkaar kunnen staan.

Orthogonaliteit is een uitbreiding van het begrip "loodrechte stand": twee vektoren zijn orthogonaal als hun in-produkt gelijk is aan nul. Orthogonaliteit neemt in verschillende ruimten verschillende vormen aan[189]. In onderstaande afbeeldingen staan de verschillende ruimten afgebeeld in twee dimensies:



A $\perp$ B, A $\perp$ C   A $\perp$ B, A $\perp$ C   A $\perp$ B, C $\perp$ C

Figuur 20: orthogonaliteit in het Euklidische, Galileïsche en Minkowskiaanse vlak

In de Euklidische ruimte zijn orthogonaliteit en de loodrechte stand identiek. De rechten B en C staan loodrecht op de rechte A.

In de Galileïsche tijdruimte staat elke ruimtelijke lijn (de rechten B en C in de figuur) ortogonaal op elke wereldlijn (de rechte A in de figuur): er is absolute gelijktijdigheid.

In de Minkowskiaanse tijdruimte is orthogonaliteit relatief ten opzichte van de wereldlijn: wereldlijnen die de hoek θ aannemen ten opzichte van de t-as staan orthogonaal op lijnen die dezelfde hoek θ aannemen ten opzichte van de x-as (lijnen A en B in de figuur – De wereldlijn A is ook de tijdsas van een klok die meereist op die wereldlijn, een waarnemer die op A reist ziet B en haar parallellen als ruimte-assen). Lichtlijnen (C rechts in de figuur) staan orthogonaal op zichzelf, wat bijzonder is omdat orthogonaliteit normaal een bij uistek niet-reflexieve relatie is.

Orthogonaliteit kan ook gebruikt worden om elkaar uitsluitende toestanden uit te drukken: rechtstaan staat orthononaal op neerzitten, "spin up" staat orthogonaal op "spin down". Orthogonaliteit wordt op die manier gebruikt in de BST van Nuel Belnap, maar ook in kwantumlogika waar er per mogelijkheid een dimensie bijkomt en er dus eventueel een oneindig aantal dimensies zijn. Men kan zich voorstellen dat er op ieder keuzemoment er zich evenveel orthogonale tijdslijnen afsplitsen als er keuzemogelijkheden zijn en dat iedere tijdslijn een lichtkegel om zich heen heeft met de alternatieve tijdruimte die door iedere keuze gegenereerd

[189] Deze voorstelling is ontstaan als antwoord op een vraag naar het "Galileïaanse in-produkt" van Karin Verrelst en de daarop volgende diskussie.

wordt.

In haar uitgebreide betekenis wordt de benaming “orthogonaliteit” gebruikt om elke relatie die symmetrisch ($a\perp b \Leftrightarrow b\perp a$) en antireflexief ($a\perp b \Leftrightarrow a \neq b$) is te omschrijven, de orthogonaliteit volgens dewelke lichtstralen loodrecht op zichzelf staan valt niet onder deze definitie omdat ze reflexief is.

Orthogonaliteit en dimensionaliteit zouden ook onder het begrip “incidentie” kunnen begrepen worden, met name Schutz doet dat wanneer hij de 3-SPRAY invoert.

De stelling van Aleksandrov/Zeeman/Hua gebruikt expliciet dat er meer dan één ruimtelijke dimensie is om tot de Minkowski-metriek te komen.

3.2. Konklusies

1. Minkowski tijdruimte is niet het definitieve model van ruimte en tijd: algemene relativiteitstheorie en kwantummechanika zijn in strijd met de Minkowski-ruimte. Maar de Minkowski-ruimte is wel een succesvol model omdat ze binnen haar geldigheidsdomein waar is, dat geldigheidsdomein groter is dan dat van de theorieën van Galileï en Newton, de theorie eenvoudig[190] is (bijvoorbeeld in de zin dat de vergelijkingen van tweede graad en bijgevolg altijd oplosbaar zijn) en er technologische toepassingen[191] bestaan.

2. In de verschillende axiomatieken zien we een verschuiving van niveau waarop gewerkt en gedacht wordt. De axioma's van D'Inverno zijn praktijkgericht (zij het binnen een theoretische branche) en leveren onmiddellijk die eigenschappen van ruimte en tijd waarin natuurkundigen geïnteresseerd zijn. De axiomatieken van Robb, Goldblatt en Schutz gaan de Minkowski tijdruimte opbouwen vanuit primitieven die dicht bij de punten en rechten liggen in de Euklidische meetkunde. De postulaten van Belnap voor BST zullen wiskundige begrippen zoals dimensionaliteit en metriek buiten beschouwing laten en op zuiver logische gronden een protofysische modale struktuur voor ruimte en tijd opbouwen.

3. De Axiomatische opbouwen van de Minkowski-ruimte zoals die van Robb, Goldblatt, Schutz en ook de BST van Belnap zijn ordinaal, ze gaan uit van partiële orderelaties. Robb gaat uit van de "after" relatie, dit is een kausale of temporele orderelatie. Andere systemen werken met relaties zoals orthogonaliteit of "betweenness", maar die kunnen op hun beurt herleid worden tot de “after” relatie of kan, omgekeerd, de “after” relatie opgebouwd worden vanuit de gebruikte primitieven.

4. Er is geen ideale axiomatisering van de Minkowski-ruimte. Een afweging die bijvoorbeeld moet gemaakt worden is de keuze tussen beslisbaar (Goldblatt) of kategorisch (Schutz). Over het algemeen zullen logici het belangrijker vinden dat de theorie beslisbaar is en zullen wiskundigen verlangen dat de theorie kategorisch is[192].

5. Er is geen formele tegenspraak tussen het vier-dimensionale “block universum” en indeterminisme. Een benadering als in BST kan bijdragen tot een beter begrip van het probleem betreffende de (in)kompatibiliteit van de relativiteitstheorie met de kwantumfysika, vooral als de laatste onder de vorm van kwantumlogika wordt uitgedrukt.

[190] Maar aanvankelijk wel kontra-intuïtief.

[191] De technologische toepassingen van de speciale relativiteitstheorie zijn beperkt. Sommige isotopen voor medische toepassingen worden in deeltjesversnellers gemaakt teggen bijna de lichtsnelheid. In het GPS-systeem moeten er relativistische effekten in rekening gebracht worden.

[192] De onverenigbaartheid van beslisbaar en kategorisch is niet typisch voor de Minkowski-ruimte, het is een eigenschap van axiomatieken in het algemeen.

Nawoord

"If you think you can just accept both postulates
[= relativiteitsprincipe en konstante lichtsnelheid]
as reasonable, you haven't got it. […]
Once again relativity is NOT a trivial reminder that
'it takes a while to see things because light has a finite speed.'
Rømer knew that in 1672, and it led to no changes in anyone's picture of space-time.
If relativity seems obvious to you, you have not yet got it.
[… E]*ven if there were no such thing as light,*
or anything else that traveled at speed c relative to other stuff,
all of the essential points of relativity
are contained in the new rules for converting between coordinate systems.
Our arguments about "what would observer A see by using light" are not essential,
just convenient paths toward these transformations.
The key point is NOT about practical limitations on observations,
but rather what sets of variables different observers have to use
to get nature to obey the same simple laws."
Michael Weissman, "Physics/Philosophy 319"[193]

Toen ik vier jaar geleden met prof. Jean Paul van Bendegem ging overleggen over mijn eindverhandeling, vroeg ik hem om "*een technisch onderwerp en inhoudelijk veilig*". De speciale relativiteitstheorie leek een goed gekend en bestudeerd gebied van de natuurkunde. Sindsdien is deze verhandeling met mij aan de haal gegaan, en ben ik tot het besef gekomen dat er geen veilige onderwerpen bestaan.

In de voorstelling van Albert Einstein, waarop bijna alle verdere studies van het onderwerp gebaseerd zijn, is de speciale relativiteitstheorie geenszins problematisch. Dit heeft een obfuskerend effekt op de ware problematieken: "[T]*he importance to recognize the Poincaré's priority on Einstein, pointing out that it is not only a legitimate question of priority.* […] *this recognition is needed to understand the new rules of enunciate formation of special relativity as a new theoretical practice, and so the meaning of the new concepts, the historical reasons of its origin, and indeed its theoretical value and its epistemological implications which are not the same Einstein-Minkowski's realistic, objectivistic ones.*"[194]

Deze verhandeling is geschreven met behulp van Sun StarOffice op GNU/Linux en MicroSoft Windows 2000; MicroSoft Word op MicroSoft Windows 2000; en OpenOffice op GNU/Linux. Het overzetten van de tekst tussen deze programma's heeft geen noemenswaardige problemen opgeleverd, wat gezien de typografische komplexiteit van deze tekst een goede indikatie is van de maturiteit van de Open Source en Free Software alternatieven. De tekeningen zijn gemaakt in ConceptDraw 1.8.5 Standard Edition van Computer Systems Odessa op MicroSoft Windows 2000.

[193] http://wug.physics.uiuc.edu/courses/phys319/
[194] [RSR 174]

Dank aan:

Mijn promotor, prof. Jean Paul van Bendegem van het Centrum voor Logika en Wetenschapsfilosofie (CLWF/VUB) voor zijn geduld, aanmoediging en inspiratie;

Voor hun verschillende visies op natuurkunde: prof. Franklin Lambert (TENA/VUB) en wijlen prof. Roger van Geen (TW/VUB);

Voor hun verschillende visies op rationele mechanika: prof. em. Jean Reignier (TENA/VUB) en wijlen prof. Paul Janssens (TW/VUB);

e.h. Jan Hofman (Onze-Lieve-Vrouwecollege Vilvoorde), van wie ik geleerd heb dat wiskunde op de draaimolen en de schuifaf zitten is;

Mijn vader, van wie ik wiskunde, natuurkunde, logika en informatika heb geleerd, en ook nog een paar dingen die niet geholpen hebben;

Mijn kinderen Lilith en Zenobius, mijn zus An, mijn moeder, wijlen mijn grootmoeder;

Vrienden, leraars en familieleden voor inhoudelijke, morele, organisatorische en/of financiële hulp, steun, inspiratie, geduld, geloof en/of ongeloof (in alfabetische volgorde en vanzelfsprekend onvolledig): Geert Acke, Haroun Amira, Nadia Amira, Ann Appermans, Barbara Brewaeys, dr. Jan Broekaert (CLEA/VUB), Dominique Broucke, Fenna Bouve, Frank Cardon, Wim Castermans, ir. Johan Coppieters, prof. Gustaaf Cornelis (CLWF/VUB), Linda Dasseville, prof. em. Hubert Dethier (L&W/VUB), Siegfried de Wolf, dr. Thomas Durt (TENA/VUB), Claude C. Krijgelmans, Ruth Lemmens, Sudip Masoji, Ate Ramboer, Ruben Ramboer, Paulette Reynaert, Cécile Robert, dr. Sonja Smets (CLWF/VUB), Paz Smidts, Pierre Smidts, ir. Tanguy Swinnen, Gwenn Troukens, dr. Frankie Valckenborg (FUND/VUB), Els Vanderstraeten, Stijn Vanermen, ir. Iris Vanhamel (IRIS/VUB), Mark “MC Speedy” Vanloo, Saskia Vanwelden, Karin Verelst (FUND/VUB), Sophie Verjans, Mirja Wastyn;

De fakulteit letteren en wijsbegeerte en de sektie wijsbegeerte en moraalwetenschappen van de Vrije Universiteit Brussel; de studenten van Studiekring Boer Plato (L&W/VUB) en van de Letteren en Wijsbegeerte Kring (LWK/VUB);

(gewezen) kollega's bij DHL GCC & BruCO, Sybase Inc., Dexia Middleware, Business Solution Partners, Interphonic (Thailand) Ltd., Brainbridge Consulting en Freelance Computer Services;

De Kodogundan.

Bijlagen

1. Kronologie tijdruimte
2. De axioma's en stellingen uit Boek I van de Elementen van Euklides
3. Minimale tijdslogika en Tijdsvertakkingen
4. De Axioma's van Ray d'Inverno
5. De axioma's van Robert Goldblatt
6. De axioma's en de stellingen 1 tot 23 van John W. Schutz
7. De postulaten van Nuel Belnap
8. Notatie

Bijlage 1: Kronologie Tijdruimte

De nadruk ligt enerzijds op de relativiteitstheorie; gebeurtenissen uit de ontwikkeling van de thermodynamika, kwantumfysika; andere takken van de natuurkunde, wiskunde, wijsbegeerte en literatuur met gevolgen voor de modellen bereffende tijd en ruimte zijn opgenomen ter vergelijking. Anderzijds wordt de ontwikkeling van de wiskunde en de logika, in het bijzonder van de axiomatische methode, behandeld.

De referentie "ook:" verwijst naar een ander koncept of een andere publicatie van dezelfde persoon die eventueel nog haar plaats moet krijgen in deze kronologie. Deze kronologie wordt hier gepresenteerd, maar is een werk dat nog in voortgang is.

Ca. 1850 vC: *Ahmes* schat de waarde van π op 3.16, eerste poging tot kwadratuur van de cirkel (Een kopie van dit werk uit ca. **1650 vC** is het “Rhind papyrus”)
ca. 575 vC: *Thales* “brengt de wiskundige kennis van de Babyloniers en Egyptenaren naar Griekenland”
ca. 546 vC: *Anaximander*
572-497 vC: *Pythagoras* van Samos: stelling van pythagoras, "reële" getallen (wortel van 2), harmonieënleer
540-480 vC: *Heraklitos*: "panta rei"
515-445 vC: *Parmenides van Elea*: het zijn is en het niets is niet
490-430 vC: *Zeno van Elea*: beweging is ingebeeld, paradoxen
460-360 vC: *Demokritos*: atomisme
428-348 vC: *Plato*: wereld van de verschijningen en wereld van de ideeën, ruimte bestaat uit verschillende geometrische figuren (niet homogeen)
ca. 440 vC: De "Elementen" van *Hipocrates van Chios* omvat de eerste vier boeken van de latere "Elementen" van *Euklides*
384-322 vC: *Aristoteles* stelt dat er drie dimensies zijn, anticipeert "methode van de virtuele arbeid"
ca. 300 vC: *Euklides* bewijst in de 13 boeken (+ 2 apokrief, door zijn leerling *Hypsicles*?) van zijn "Elementen" de totale wiskundige kennis van de Grieken op dat moment op basis van 5 axioma's, 5 gemeenplaatsen en definities. Boeken 1 tot 4, 7 en 9 omvatten de Pythagoreïsche leer; boek 8 de leer van Archytas; boeken 5, 6 en 12 de leer van Eudoxos; boeken 10 en 13 de leer van Theaetetos
ca. 290 vC: *Aristarchus van Samos* berekent de afstand van de Aarde tot de zon en de maan en stelt dat de Aarde rond de zon draait
ca. 250 vC: *Archimedes* formuleert het kontinuïteitsaxioma
285-205 vC: *Erathosthenes* berekent de omtrek van de Aarde
85-160: *Ptolemeus* "bewijst" dat er drie dimensies zijn. Ptolemaisch wereldbeeld met de Aarde centraal en onbeweeglijk.
430: *St. Agustinus*: "Wanneer niemand het me vraagt, dan weet ik wat tijd is. Maar als men het me vraagt, dan vind ik geen woorden"
ca. 500: *Brahmagupta van Multan* rekent met het getal nul (“sunya”) in “Brahmasphutasiddantha”
850: *Thabit ibn Qurra* (826-901): niet-Euklidische wiskunde? (enkel werk over derdemachtsvergelijkingen is nog beschikbaar)
ca. 1000: *Ibn al-Hay-tham* (*Alhazen*, 965-1038) publiceert “Optica”
1030: *Ali Ahmed Nasawi* verdeelt de dag in 24 uur x 60 minuten x 60 sekonden
1092: Waterradklok van *Soe Soeng*: vroege vorm van het echappement
1054: China, Japan en Korea nemen supernova waar in het sterrenbeeld Stier (restanten zijn nog steeds zichtbaar als "krabnevel")
1230: *Villard de Honnecourt* vindt het echappement (ontsnappingsmechanisme in de gang van een klok) uit bij de konstruktie van een wijzer die steeds in de richting van de zon wijst. Voor het einde

van de dertiende eeuw zijn er verschillende klokketorens met uurwerken op basis van het echappement, onder meer in Italië.
1267-1268: *Roger Bacon* (1214-1294?) publiceert “Opus majus”, “Opus minor” en “Opus tertium”
1543: *Nikolaas Kopernicus* (1473-1543) publiceert "De revolutionibus Orbium Caelestium": de Aarde beweegt rond het centrum van het universum (de zon staat in de nabijheid van dat centrum).
1553: *Michael Stifel* stelt dat vier of meer dimensies "onnatuurlijk" zijn
1571: *Thomas Digges* (1546?-1595) introduceert de termen “as” (”axis”) en “orthogonaal” in “A Geometricall Practise named Pantometria”
1572: *Tycho Brahe* neemt supernova waar
16??: *Gregory of St. Vincent* (1584-1667) introduceert de term “terminus” (“limiet”)
1604: *Johannes Kepler* neemt supernova waar
1608: *Hans Lippershey* vraagt oktrooi aan voor de telescoop "Hollandse Kijker"
1609: *Johannes Kepler* (1571-1630) publiceert de eerste twee wetten van Kepler in “Astronomia nova”: de Aarde draait in een elipsvormige baan rond de zon, perkenwet
1619: *Johannes Kepler* (1571-1630) publiceert de derde wet van Kepler in “De Harmonice Mundi”
1620: *Francis Bacon* (1561-1626) publiceert “Novum organum”
1632: *Galileo Galileï* (1564-1642) Relativiteitsbeginsel voor de mechanika (in: Dialogue concerning the two chief world systems: Ptolemaic & Copernican)
1634: *René Descartes* schrijft aan *Beeckman* dat er geen hoogste snelheid bestaat
1637: *René Descartes* (1596-1650) publiceert "Discours de la méthode" met bijlage “Geometrie"
1640: *Ismael Bullialdus* suggereert dat de zwaartekracht omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand
1641: *René Descartes* (1596-1650) publiceert "Meditationes"
1665: universele zwaartekrachtwet van *Isaac Newton*
1665: *John Wallis* introduceert de term “induktie”
1670: *Isaac Newton* bouwt spiegelteleskoop
1671: *Henry More* stelt dat geesten de vierde dimensie bewonen (deze stelling werd gevolgd door *Johan Karl Friedrich Zöllner*, *Bernhard Riemann*, *A.E. Dolbear*, *T. Proctor Hall*, *William Crookes* en de Society for Psychical Research, *Wilhelm Weber*, *J.J. Thompson*, *Lord Rayleigh* en was populair in Cavendish Laboratory. De stelling werd aangevallen door *Ernst Mach*, *Edmund C. Sanford*, *Hermann Schubert*, *P.G. Tait* en *J.B. Stallo*)
1672: *Ole Rømer* meet de lichtsnelheid
1678: *Christiaan Huyghens* (1629-1695) licht = golf in "Traité de la lumiere"
1684: *Leibniz* beschrijft integraal- en differentiaalrekening in "Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus" (Leibniz spreekt niet van integraalrekening maar van “calculus summatorius” totdat Jacob Bernouilli de term “integraal” invoert)
1685: *John Wallis* stelt dat vier of meer dimensies "onnatuurlijk" zijn
1687: *Isaac Newton* (1642-1727) publiceert "Principia": bewegingswetten, theorie van de universele gravitatie, absolute ruimte en tijd (ook: integraal- en differentiaalrekening)
1689: *John Locke* "Essay concerning human understanding"
1690: *Jacob Bernoulli* (1654-1705) introduceert de term “integraal”
1692: *Leibniz* introduceert de termen “koordinaten” en “assenstelsel”
16??: *Christiaan Huyghens* (1629-1695) relativiteitsbeginsel (Duitse vertaling **1903:** Über die Beweging der Körper durch den Stoss / Über die Centrifugalkraft)
1704: *Isaac Newton* (1642-1727) publiceert “Opticks”: licht=deeltje, afwijking van licht ten gevolge van massa (waarde verschilt met faktor 2 van de waarde van *Johan Georg von Soldner* **1801** & *Albert Einstein* **1915**)
1709, 1710, 1713: *George Berkeley* (1685-1753)
1715: *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1645-1716): ruimte en tijd als orderelaties (ook:

differentieaal/integraal-calculus, "vis viva" $E=mv^2$, "arbeid van een kracht")
1733: *Girolamo Saccheri* publiceert "Euclides ab omni naevo vindicatus: Sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima universae geometriae principia"
1736: *Euler* ontwikkelt de grafentheorie om het probleem van de “Zeven bruggen van Königsberg” op te lossen
1738: *Daniel Bernoulli* stelt in "Hydrodynamika" voor om gassen te beschouwen als een verzameling snel bewegende mikroskopische deeltjes (thermodynamika)
1746: *Pierre de Maupertuis* (1698-1759): principe van de minimale arbeid
1747: *D'Alembert* publiceert "Traité de dynamique" (inwendige krachten van een star lichaam in beweging zijn in evenwicht)
1748: *David Hume* (1711-1776) publiceert "Enquiry concerning human understanding" (ook: Treatise on Human Nature)
1754: *Jean d'Alembert* (1717-1785) beschouwt de tijd als vierde dimensie in zijn artikel "Dimension"
1763: *Robert Joseph Boscovich, sj.* introduceert het "Principe van Mach", "lengte-contractie", "tijds-dillatatie" en "invariantie-principe" in "A Theory of Natural Philosophy" (Engelse vertaling: MIT Press **1966**)
1765: *Euler* "Theory of the Motions of Rigid Bodies" = analytische mechanika
1781: *William Herschel* ontdekt Uranus
1781, 1787: *Immanuel Kant* (1724-1804), "Kritiek van de zuivere rede": de Euklidische ruimte en tijd zijn synthetische a-priori oordelen, direkte intuïtie.
1782: *George-Louis Le Sage* voorspelt dat zwaartekracht zich tegen lichtsnelheid voortplant
1785: *Charles Augustin de Coulomb* (1736-1806) publiceert “Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de metal”
1787: *Immanuel Kant* (1724-1804), "Prolegomena"
1788 (1797?): *J.L. Lagrange* ontwikkelt mechanika met de tijd als vierde dimensie
1798: *Count Rumford (Benjamin Thompson)* stelt dat hitte een vorm van energie is (thermodynamika)
1798: *Henry Cavendish* meet de gravitationele konstante
17??: *Euler* (1707-1783): wiskundige formulering van het principe van de minimale arbeid
1801: *Johan Georg von Soldner* voorspelt de afwijking van een lichtstraal onder invloed van massa
1801: *Thomas Young* (1773-1829): interferentie, licht=golf, double-slit experiment
1803: *John Dalton* voert de “atomen” in de “hedendaagse” betekenis in de scheikunde in
1808: *F.W.H.A von Humboldt*: Principe van Mach (ook: **1844**)
1809: *Carl Friedrich Gauss* "Theoria motus corporum coelestium in secionibus conicis solem ambientium"
juli 1816: *J. Herapath* publiceert "On the physical properties of gases" (ook: **1847**)
1820: *Hans Christian Oersted* (1777-1851) toont het verband tussen elektriciteit en magnetisme aan
1822: *Joseph Fourier* introduceert het gebruik van dimensies om fysische kwantiteiten weer te *geven in* Theorie Analytique de la Chaleur (thermodynamika)
1824: *Sadi Carnot* (1796-1832) formuleert de eerste wet van de thermodynamika in "Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance"
1826: *Ampere* publiceert "Memoir on the Mathematical Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Deduced from Experience"
1827: *Möbius* toont aan dat een rotatie in vier dimensies een rechtsdraaiend assenstelsel omvormt in een linksdraaiend
1829/1830: *Nicolai Ivanovich Lobachevsky* publiceert zijn werk over hyperbolische niet-euklidische meetkunde.

1830: *Evariste Galois* (1811-1832) introduceert het begrip “groep”
1832-1833: *János Bolyai* publiceert "Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens"
1833 (1828?): Stelling van *George Green*
1834: *Hamilton* "On a General Method in Dynamics"
1835: *Coriolis* Coriolis-kracht
1838: *De Morgan*: methode van de "wiskundige induktie"
1844: *Hamilton* introduceert de term “Cartetische koordinaten”
1844, 1846, 1851, 1852: *M. Faraday*
1844: *Hermann Günther Grassman* (1809-1877) introduceert het “in-produkt”
1844: *Hamilton* introduceert de begrippen “skalair” en “vektor”
1845: *Urbain Leverrier* berekent de positie van Neptunus
1846: *Galle* ontdekt Neptunus op basis van de berekening van *Urbain Leverrier*
1846: *Hamilton* introduceert de term “tensor” (niet in de huidige betekenis van het woord: *Hamilton* bedoelt “modulus”)
1847: *Boole* "The Mathematical Analysis of Logic": Booleaanse algebra
1847: Wetten van *De Morgan*
1848: *Lord Kelvin* absolute nulpunt (thermodynamika)
1848: *J.B. Stallo* publiceert "General Principles of the Philosophy of Nature"
1848: *Edgar Allan Poe* publiceert "Eureka", tijd als vierde dimensie (onder invloed van *Humboldt*)
1850: *James Joseph Sylvester* introduceert het begrip "matrix" in "Additions to the Articles On a new class of theorems, and On Pascal's theorem"
1850: *Liouville* introduceert het begrip “geodetische kromme”
1851: *James Joseph Sylvester* introduceert de term “invariant” in "On A Remarkable Discovery in the Theory of Canonical Forms and of Hyperdeterminants"
1851: *James Joseph Sylvester* introduceert de term “Jacobiaan”
1851: *Fizeau*’s experiment betreffende de lichtsnelheid in een stromende vloeistof
1853: *Sylvester* introduceert de term “kovariant”
1857, 1858, 1864, 1875, 1877, 1880: *R.J.E. Clausius* herformuleert de tweede wet van de thermodynamika als "het is onmogelijk om een apparaat te bouwen dat, indien het in een cyclus opereert, geen enkel ander effekt produceert dan het transport van hitte van een kouder naar een warmer lichaam" en introduceert van het begrip "entropie” (thermodynamika)
1858: *Cayley* "A Memoir on the Theory of Matrices"
1858: *Dedekind* introduceert het begrip “veld” (Engels: “field”, Duits: “Körper”) in de wiskunde
1860, 1866, 1867: *James Clerk Maxwell* (1831-1879) formuleert de "equilibrium velocity distribution law" en start een statistische en probabilistische aanpak van de thermodynamika, geïnspireerd door het werk betreffende foutentheorie van R. Adrian, K. Gauss en A. Quetelet.
1864: *James Clerk Maxwell* (1831-1879) voorspelt dat er elektromagnetische golven bestaan die zich voortplanten met de lichtsnelheid
1866: *Ernst Mach* (1838-1916)bespreekt vierdimensionale positie in "Über die Entwicklund der Raumvorstellungen"
1867: *Bernhard Rieman* (1826-1866) publiceert (postuum) " Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" en "Ein Beitrag zur Elektrodynamik" en intoduceert de term “Mannigfaltigkeit” (“manifold”)
1868, 1872: *L. Boltzmann* werkt de "equilibrium velocity distribution law" van Maxwell verder uit. (thermodynamika)
1869: *E.B. Christoffel* publiceert " Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades"
1870: *Carl Neumann* publiceert " Über die Principien der Galileï-Newton'schen Theorie" (ook: **1865**, **1868**, **1874**, **1877**, **1886**, **1896**)

1870: W. K. *Clifford*, "On the Space Theory of Matter"
1870: *Felix Klein* bewijst dat het vijfde axioma van Euklides onafhankelijk is van de andere.
1871, 1888: *Dedekind* herdefinïeert het begrip "kontinuïteit"
1871: *Maxwell*'s Demon gedachtenexperiment (thermodynamika, kwantumfysika)
1872: *Camille Flammarion* publiceert "Lumen" met "gedachtenexperiment van Einstein"
1873: *James Clerk Maxwell* (1831-1879) publiceert de wetten van de elektrodynamika in "Treatise on Electricity and Magnetism"
1874: *Georg Cantor* verzamelingenleer
1874: *Thomson* (thermodynamika)
1874: *Lord Kelvin* (*William Thomson*, 1824-1907) : Kelvin-Planck formulering van de 2e wet thermodynamika
1875: *S. Tolver Preston* voorspelt atoomenergie, de atoombom en supergeleiding op basis van $E=mc^2$ in "Physics of the Ether" (ook: **1871, 1877**)
1876: *James Clerk Maxwell* (1831-1879) publiceert "Matter and Motion"
1876: W. K. *Clifford* stelt dat de beweging van materie veroorzaakt wordt door de geometrie van de ruimte
1876-1877: *J. Loschmidt* vestigt de aandacht van *L. Boltzman* op de "Umkehreinwand" (Reversibility Objection) (thermodynamika)
1877: *Zöllner* verdedigt *Henri Slade* voor de rechtbank en voert experimenten uit met betrekking tot de geesten in de vierde dimensie
1877-1881: mijnbouwingenieur *Robert Stevenson* (pseudoniem: *Kinertia*, 1844-19??) voert valexperimenten uit in mijnschachten en formuleert het ekwivalentieprincipe
1878: *Hermann Ludwig Ferdinant von Helmholtz* (1821-1894): verwerpt Kant's "Euklidische Ruimte" als "synthetische a-priori"
1879: *Gottlob Frege* publiceert het "Begriffsschrift"
1879: *William Kingdon Cliffort*: "In order to explain the phenomena of light, it is not necessary to assume anything more than a periodical oscillation between two states at any given point of space" in "Lectures an essays, Volume I"
1881: experiment van *Albert Abraham Michelson* (1852-1931)
1881: *Gibbs* vektoranalyse
1882: axioma van *Pasch*
1882: *Walter Dyck* (1856-1934) introduceert de term "isomorfisme" in "Gruppentheoretische Studien"
1883: *E. Mach* publiceert "Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Historisch-kritisch dargestellt."
1884: *Charles Hinton* publiceert "What is the fourth dimension?" (2e uitgave - er was een eerdere uitgave dan **1884**??)
1884: *Edwin Abbot* publiceert de novelle "Flatland: a romance of many dimensions by a square"
1885: *Ludwig Lange* (1863-1938) stelt voor om het begrip "absolute ruimte" te vervangen door "inertïeel systeem"
26 maart 1885: "*S.*" (*Simon Newcomb*? *S. Tolver Preston*?) introduceert "time-space", "four-dimensional solid" & "sur-solid", "time area" en "time-line" in artikel "Four-Dimensional Space" (Nature, Vol. 31, Nr. 804)
1886: *Ernst Mach* (1838-1916) publiceert "Analysis of sensations"
1887: experiment van *Albert Abraham Michelson* (1852-1931) & *Edward W. Morley*
1887: *Woldemar Voigt* (1850-1919) publiceert relativistische transformaties en poneert de absolute lichtsnelheid in "Über das Doppler'sche Princip"
1887: *Jules Henri Poincaré* publiceert "Sur les Hypothèses Fondamentales de la géometrie"
1887: *Levi-Civita* tensorcalculus
1887/1888: *Heinrich Rudolf Hertz* (1857-1894) ontdekt de radiogolf (bevestiging van de wetten van *Maxwell*) en het foto-elektrisch effekt

1888: torsiebalans van *Roland* (*Lórand*) *van Eötvös* (zwaartekracht)
1889: *Poincaré* publiceert "Théorie Mathématique de la Lumière"
1889: *Poincaré* recurrence (thermodynamika)
1889: *George Francis FitzGerald* publiceert FitzGerald-kontraktie
1889: *Simon Newcomb*: relativistische energie
1889: *Oliver Heaviside* noemt elektomagnetisme de "electric force of inertia" in "On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dialectric"
1889: Axioma's van *Peano* voor de rekenkunde
1891: *Oscar Wilde* ridiculiseert (het geloof in geesten in) de vierde dimensie in "The Canterville Ghost"
1891: *Gottlob Frege* publiceert "Ueber das Trägheitsgesetz"
1892: *Hendrik Antoon Lorentz* (-1928) publiceert de Lorentztransformaties
1892: *J. Violle*: relativiteitsbeginsel in "Lehrbuch der Physik"
1892: *Poincaré* publiceert "Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste" (Volume 1-3)
1893: *Ernst Mach* (1838-1916) principe van Mach (zwaartekracht)
1893: *S. Lie* publiceert "Theorie der Transformationsgruppen"
1894: Relativistische transformaties van *Joseph Larmor*?
1894: *H.G. Wells* publiceert de novelle "The Time Machine"
1895: *Schuetz* en *Boltzmann* suggereren het "antropisch principe" in "On certain questions of the theory of gasses"
1895: *Poincaré* publiceert "Analysis situs"
1895: *Georg Cantor* transfinite getallen in "Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre"
1897: Horace Lamb (1849-1934) introduceert de term "gradient" in de hedendaagse betekenis in "An Elementary Course of Infinitesimal Calculus"
1898: *Paul Gerber* publiceert de formule van de Periheliumbeweging van Mercurius in "Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation"
1898: *Jules Henri Poincaré* stelt dat simultaneïteit relatief is en valt het onderscheid dat *Lorentz* en *Larmor* tussen "tijd" en "lokale tijd" maken aan
1898: *Woldemar Voigt* (1850-1919) gebruikt het woord "tensor" in de hedendaagse betekenis
1899: *David Hilbert* herfomuleert de axioma's van Euklides
1900: *Joseph Larmor* publiceert "Aether and Matter"
1900: Programma van *Hilbert*
1900: *Max Planck* intoduceert het begrip "kwantum"
1900: *Levi-Civita* & *Ricci-Curbastro* publiceren "Méthodes de calcul differential absolu"
1900: *F. Morley* introduceert de term "mapping" in "On the Metric Geometry of the Plane *N*-Line,"
1901: *J.B. Stallo*: relativiteitsbeginsel in Die Begriffe und Theorieën der modernen Physik
1902: *Jules Henri Poincaré* (1854-1912) publiceert "La science et l'hypothese"
1902: *L. Lange*: relativiteitsbeginsel in: Das Inertialsystem vor dem Forum der Naturforschung: Kritisches und Antikritisches
1903: "Relativitätstheorie" (sic) van *F. Kottler*
1904: *Jules Henri Poincaré* presenteert het relativiteitsbeginsel voor de elektromagnetika te St. Louis
1904, 1911: Verdere uitwerking van de Euklidische axioma's van *Hilbert* door Oswald *Veblen*, introduktie van de term "kategorisch"
5 juni 1905: *Jules Henri Poincaré* publiceert speciale relativiteitstheorie: "Sur la dynamique de l'électron"
30 juni 1905: *Albert Einstein* (en/of *Mileva Einstein-Marity/Marić*?) publiceert speciale relativiteitstheorie: "Zur Elektrodynamik bewegter Körper"
1905, 1906: *Einstein* over kwantumfysika (volgens *Thomas Kuhn* wordt hier het begrip "kwantum"

voor het eerst juist begrepen)
1906: *Max Plack* publiceert "Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik"
1906: *Roberto Marcolongo* publiceert speciale relativiteitstheorie in vier dimensies in "Sugli integrali delle equazione dell'elettro dinamica"
1906: *Walther Hermann Nernst* (1864-1941): 3e wet thermodynamika
1907: *Einstein* equivalentieprincipe
5 november 1907, 1908: *Hermann Minkowski* (1864-1909) stelt speciale relativiteitstheorie in vier dimensies voor te Keulen
1908: Verdere uitwerking van de Euklidische axioma's van *Hilbert* door *Moore*
1908: *James Ellis McTaggart* publiceert “'The unreality of time” (Mind 18, 457-84)
1909: *C. Carathéodory* herformuleert de tweede wet van de thermodynamika: "In de omgeving van de initiële toestand van een systeem, bestaan er toestanden die niet bereikbaar zijn volgens enig adiabatisch pad." (thermodynamika)
1910: *Noether* publiceert "Zur Kinematik des starren Körpers in der Relativtheorie"
1910, 1912, 1913: *Alfred North Whitehead* en *Bertrand Russel* publiceren de "Principia mathematica"
1913: *Niels Bohr* (1885-1962) atoommodel
1914: *Alfred Arthur Robb* (1873-1936) publiceert "A theory of space and time": axiomastelsel voor speciale relativiteitstheorie op basis van een kausale orderelatie.
1914: *Parcival Lowell* maakt de berekeningen die tot de ontdekking van Pluto (**1930**) leiden
1914: *Felix Hausdorff* (1869-1942) introduceert het begrip “metrische ruimte”
1914: *Gunnar Nordström*: vijf-dimensionale theorie voor de zwaartekracht en het elektromagnetisme
18 november 1915: *Albert Einstein* schrijft aan *David Hilbert* dat hij diens voorpublikatie van de kovariante theorie ontvangen heeft en geeft de lezing "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie" met de formule van *Paul Gerber* aan de Koninklijke Pruisische Akademie voor Wetenschappen in Berlijn.
20 november 1915: *David Hilbert* dient algemene relativiteitstheorie in voor publikatie (gepubliceerd in **januari 1916**): "Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung)"
25 november 1915: *Einstein* dient algemene relativiteitstheorie in voor publikatie (gepubliceerd op **2 december 1915**): "Die Feldgleichungen der Gravitation."
1918: *Weyl*: axiomastelsel voor algemene relativiteitstheorie
1919: *Theodr Kaluza* verenigt de zwaartekrachttheorie met de wetten van Maxwell in vijf dimensies
1919: *Arthur Eddington* meet de afwijking van het licht onder invloed van massa (de resultaten van die meting worden niet langer algemeen aanvaard)
1923: *Louis Victor prince de Broglie* (1892-19??): golfkarakter van de materie (kwantumfysika)
1924: *Reichenbach*: axiomastelsel voor algemene relativiteitstheorie
1924: *Max Born* (1882-1970) publiceert “Zur Quantummechanik”
1925: *John von Neumann* publiceert "An axiomatization of set theory" (ook over de grondslagen van de wiskunde: **1923**, **1926**, **1927**, **1928**, **1929**)
1925: *Werner Heisenberg* (1901-1976) schrijft de kwantumfysika onder de vorm van matrixmechanika
1926: *Erwin Schrödinger* (1887-1961) schrijft de kwantumfysika onder de vorm van golfvergelijkingen
1926: *Oskar Klein* werkt de theorie van *Theodr Kaluza* uit **1919** uit tot de "Kaluza-Klein Theorie"
1928: *Paul Adrien Maurice Dirac*(1902-1984) relativistische golfvergelijking voor het elektron
1929: *Th. Muir* introduceert de term “Lagrangiaan” in "Note on the Lagrangian of a special unit determinant"
1930: *Kurt Gödel* bewijst de kompleetheid van de axioma's van de predikatenlogika van de eerste orde

1930: *Clyde Tombaugh* ontdekt Pluto
1931: *Kurt Gödel* publiceert "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme"
1932: *John von Neumann* introduceert kwantum-logika
1935: *Tarski* bewijst dat de Euklidische ruimte niet door een enkele binaire relaties kan worden beschreven
1935: *Albert Einstein*, *B. Podolsky* & *N. Rosen*: EPR-paradox (kwantumfysika)
1935: *Pauling* & *Wilson* introduceren de term "Laplaciaan"
1936: *G. Birkhoff* & *John von Neumann* publiceren "The logic of quantum mechanics"
1938: *Oskar Klein* ontdekt het "Yang-Mills veld"
1948, 1949, 1959: *Walker*, axioma's voor speciale relativiteitsteorie
1949(?): *A.D. Aleksandrov* bewijst de stelling van Aleksandrov-Zeeman-Hua
1954: *C.N. Yang* en *R.L. Mills* ontdekken het "Yang-Mills veld"
4 oktober 1957: De Sovjet Unie lanceert de eerste kunstmaan Spoetnik I
3 november 1957: De hond *Laika* maakt een ruimtevlucht (en sterft) in de Spoetnik II
12 april 1961: *Yuri Alexevitsj Gagarin* vliegt in een Vostok-ruimteschip rond de Aarde
5 mei 1961: *Alan Barlett Shepard jr.* maakt een ruimtevlucht in een Mercury-ruimteschip
1964: relativiteitsprincipe nogmaals experimenteel bevestigd door *Torsten Alväger*
1964: *E. Christopher Zeeman* bewijst de stelling van Aleksandrov-Zeeman-Hua
1965: Theorema van *J.S. Bell* (kwantumfysika)
1967: *Bryce DeWitt*: Wheeler-DeWitt vergelijking
1968: *Szekeres*, axioma's voor speciale relativiteitsteorie
21 juli 1969: *Neil Alden Armstrong* en *Edwin E. Aldrin jr.* landen op de maan
1973: *John W Schutz*: "Foundations of Special Relativity: Kinematic Axioms for Minkowski Space-Time"
1981(?): *Loo-Keng Hua* bewijst de stelling van Aleksandrov-Zeeman-Hua
1987: *Robert Goldblatt*, "Orthogonality and Spacetime Geometry"
1992: *Nuel Belnap*, Branching Space-Time
1997: *John W Schutz*: "Independent axioms for Minkowski space-time"

Bijlage 2. De axioma's en stellingen uit Boek I van de Elementen van Euklides

De Axioma's (EU1-EU5) en gemeenplaatsen (CN1-CN5) van Euklides staan in onderstaande axioma-theorema matrix naast mekaar. De gemeenplaatsen worden verder zoals axioma's behandeld. De 48 in Boek 1 bewezen theorema's staan onder mekaar. In het rooster kan afgelezen worden welke axioma's (aangegeven door een sterretje * onder het betreffende axioma) en stellingen (aangegeven met hun nummer onder de axioma's die de gebruikte stellingen zelf nodig heeft) er gebruikt worden om wat te bewijzen.

Voorbeelden: De eerste stelling gebruikt de axioma's EU1, EU3 en de gemeenplaats CN1. De tweede stelling gebruikt behalve de eerste stelling, de axioma's EU1, EU2, EU3, CN1 en CN3. De derde stelling gebruikt stelling twee en de axioma's EU3 en CN1. Hoewel er in de derde stelling geen expliciet gebruik wordt gemaakt van het eerste axioma, is het in de tabel op zicht duidelijk dat dit axioma nodig is om stelling drie te bewijzen, omwille van stelling twee. Stelling vier berust enkel[195] op gemeenplaats CN4. Deze stelling wordt zelf een kongruentie-axioma bij Russel en bij Hilbert. In stelling zes gebruikt Euklides geen enkel van zijn axioma's, hij gebruikt wel voor het eerst een redenering uit het ongrijmde. In stelling 29 wordt het vijfde axioma voor het eerst gebruikt Samen met axioma 28 en de axioma's die er op volgen bewijst stelling 29 dat het vijfde axioma van Euklides gelijkwaardig is aan de Playfair-formulering waarin het nu meestal weergegeven wordt.

EU1	Tussen elke twee verschillende punten p en q kan er een unieke rechte getrokken worden.
EU2	Voor elk segment AB en voor elk segment CD bestaat er een uniek punt E zodanig dat B tussen A en E ligt en segment CD kongruent is aan segment BE.
EU3	Voor elke twee verschillende punten O en A bestaat er een cirkel met middelpunt O en straal OA.
EU4	Alle rechten hoeken zijn kongruent.
EU5	if a straight line falling on two straight lines make the interior angle on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than two right angles. Playfair-variant: Door elk gegeven punt kan er een unieke rechte getrokken worden die evenwijdig is aan een gegeven rechte.
CN1	Dingen die gelijk zijn aan hetzelfde ding, zijn ook gelijk aan elkaar.
CN2	If equals be added to equals, the wholes are equal.
CN3	If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.
CN4	Things which coincide with one another are equal to one another.
CN5	The whole is greater than the part.

axioma-theorema matrix	***EU1***	***EU2***	***EU3***	***EU4***	***EU5***	***CN1***	***CN2***	***CN3***	***CN4***	***CN5***
1: To construct an equilateral triangle on a given finite straight line.	*		*			*				
2: To place a straight line equal to a given straight line with one end at a given point.	*;1	*	*;1			*;1		*		
3 : To cut off from the greater of two given unequal straight lines a straight line equal to the less.	2	2	*;2			*;2		2		
4: If two triangles have two sides equal to two sides respectively, and have the angles contained by the equal straight lines equal, then they also have the base equal to the base, the triangle equals the triangle, and the remaining angles equal the remaining angles respectively, namely those opposite the equal sides.									*	
5 : In isosceles triangles the angles at the base equal one another, and, if the equal straight lines are produced further, then the angles under the base equal one another.	*;3	*;3	3			3		3	4	
6: If in a triangle two angles equal one another, then the sides opposite the equal angles also equal one another.										
7: Given two straight lines constructed from the ends of a straight line and meeting in a point, there cannot be constructed from the ends of the same straight line, and on the same side of it, two other straight lines meeting in another point and equal to the former two respectively, namely each equal to that from the same end.	5	5	5			5		5	5	
8: If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, and also have the base equal to the base, then they also have the angles equal which are contained by the equal straight lines.	7	7	7			7		7	7	
9: To bisect a given rectilinear angle.	3;8	3;8	3;8			3;8		3;8	8	
10: To bisect a given finite straight line.	1;9	1;9	1;9			1;9		1;9	4;9	
11: To draw a straight line at right angles to a given straight line from a given point on it.	1;3;8	1;3;8	1;3;8			1;3;8		3;8	8	
12: To draw a straight line perpendicular to a given infinite straight line from a given point not on it.	*;8;10	8;10	*;8;10			8;10		8;10	8;10	
13: If a straight line stands on a straight line, then it makes either two right angles or angles whose sum equals two right angles.	11	11	11			*;11	*	11	11	

195 Ik ben echter van mening dat Euklides zijn vijfde axioma in de redenering impliciet gebruikt. In deze tabel geef ik echter de stellingen zoals ze er expliciet staan. Het kontinuïteitsaxioma (zoals dat van Archimedes of dat van Dedekind) wordt ook reeds impliciet gebruikt vanaf stelling één. De axioma's zijn vrij vertaald weergegeven. De teksten van de stellingen komen van de web site van J.J. O'Connor en E.F. Robertson.

axioma-theorema matrix	EU1	EU2	EU3	EU4	EU5	CN1	CN2	CN3	CN4	CN5
14: If with any straight line, and at a point on it, two straight lines not lying on the same side make the sum of the adjacent angles equal to two right angles, then the two straight lines are in a straight line with one another	13	13	13	*		*,13		*;13	13	
15: If two straight lines cut one another, then they make the vertical angles equal to one another. (Corollary:If two straight lines cut one another, then they will make the angles at the point of section equal to four right angles.)	13	13	13	*		*;13		*;13	13	
16: In any triangle, if one of the sides is produced, then the exterior angle is greater than either of the interior and opposite angles.	3;10;15	*;3;10;15	3;10;15			3;10;15		3;10;15	4;10;15	*
17: In any triangle the sum of any two angles is less than two right angles.	13	*;13	13			13		13	13	
18: In any triangle the angle opposite the greater side is greater.	3;16	3;16	3;16			3;16		3;16	16	16
19: In any triangle the side opposite the greater angle is greater.	15;18	15;18	15;18	15		15;18		15;18	15;18	18
20: In any triangle the sum of any two sides is greater than the remaining one.	5;19	5;19	5;19	19		5;19		5;19	5;19	*;19
21: If from the ends of one of the sides of a triangle two straight lines are constructed meeting within the triangle, then the sum of the straight lines so constructed is less than the sum of the remaining two sides of the triangle, but the constructed straight lines contain a greater angle than the angle contained by the remaining two sides.	16;20	16;20	16;20	20		16;20		16;20	16;20	16;20
22: To construct a triangle out of three straight lines which equal three given straight lines: thus it is necessary that the sum of any two of the straight lines should be greater than the remaining one.	3;20	3;20	3;20	20		3;20		3;20	20	20
23: To construct a rectilinear angle equal to a given rectilinear angle on a given straight line and at a point on it.	8;22	8;22	8;22	22		8;22		8;22	8;22	22
24: If two triangles have two sides equal to two sides respectively, but have one of the angles contained by the equal straight lines greater than the other, then they also have the base greater than the base.	5;19;23	5;19;23	5;19;23	19;23		5;19;23		5;19;23	4;5;19;23	19;23
25: If two triangles have two sides equal to two sides respectively, but have the base greater than the base, then they also have the one of the angles contained by the equal straight lines greater than the other.	24	24	24	24		24		24	4;24	24
26: If two triangles have two angles equal to two angles respectively, and one side equal to one side, namely, either the side adjoining the equal angles, or that opposite one of the equal angles, then the remaining sides equal the remaining sides and the remaining angle equals the remaining angle.	16	16	16	16		16		16	4,16	16
27: If a straight line falling on two straight lines makes the alternate angles equal to one another, then the straight lines are parallel to one another.	16	16	16	16		16		16	16	16
28: If a straight line falling on two straight lines makes the exterior angle equal to the interior and opposite angle on the same side, or the sum of the interior angles on the same side equal to two right angles, then the straight lines are parallel to one another.	13;27	13;27	13;27			13;27		13;27	13;27	27
29: A straight line falling on parallel straight lines makes the alternate angles equal to one another, the exterior angle equal to the interior and opposite angle, and the sum of the interior angles on the same side equal to two right angles.	13;15	13;15	13;15	15	*	*;13;15	*	13;15	13;15	
30: Straight lines parallel to the same straight line are also parallel to one another.	29	29	29	29	29	29	29	29	29	
31: To draw a straight line through a given point parallel to a given straight line.	23,27	23;27	23;27	23		23;27		23;27	23;27	23;27
32: In any triangle, if one of the sides is produced, then the exterior angle equals the sum of the two interior and opposite angles, and the sum of the three interior angles of the triangle equals two right angles.	13;29;31	13;29;31	13;29;31	29;31	29	13;29; 31	29	13;29;31	13;29; 31	31
33: Straight lines which join the ends of equal and parallel straight lines in the same directions are themselves equal and parallel.	27;29	27;29	27;29	27;29	27;29	27;29	27;29	27;29	4;27;29	27
34: In parallelogrammic areas the opposite sides and angles equal one another, and the diameter bisects the areas	26;29	26;29	26;29	29	29	26;29	*;29	26;29	4;26;29	26
35: Parallelograms which are on the same base and in the same parallels equal one another.	34	34	34	34	34	*;34	*;34	*;34	4;34	34
36: Parallelograms which are on equal bases and in the same parallels equal one another.	33;34;35	33;34;35	33;34;35	33;34;35	33;34;35	33;34;35	33;34;35	33;34;35	33;34;35	33;34;35
37: Triangles which are on the same base and in the same parallels equal one another.	31;34;35	31;34;35	31;34;35	31;34;35	34;35	31;34;35	34;35	31;34;35	31;34;35	31;34;35
38Triangles which are on equal bases and in the same parallels equal one another.	31;34;36	31;34;36	31;34;36	31;34;36	34;36	31;34;36	34;36	31;34;36	31;34;36	31;34;36
39: Equal triangles which are on the same base and on the same side are also in the same parallels.	31;37	31;37	31;37	31;37	31;37	*,;37	31;37	31;37	31;37	31;37
40: Equal triangles which are on the same base and on the same side are also in the same parallels.	38	38	38	38	38	*;38	38	38	38	38
41: If a parallelogram has the same base with a triangle and is in the same parallels, then the parallelogram is double the triangle.	34;37	34;37	34;37	34;37	34;37	34;37	34;37	34;37	34;37	34;37
42: To construct a parallelogram equal to a given triangle in a given rectilinear angle.	23;31;41	23;31;41	23;31;41	23;31;41	41	23;31;41	41	23;31;41	23;31;41	23;31;41
43: In any parallelogram the complements of the parallelograms about the diameter equal one another.	34	34	34	34	34	34	*;34	*;34	34	34
44: To a given straight line in a given rectilinear angle, to apply a parallelogram equal to a given triangle.	15;29; 31;43	15;29; 31;43	15;29; 31;43	15;29; 31;43	*;29;43	15;29; 31;43	29;43	15;29; 31;43	15;29; 31;43	43;31;43
45: To construct a parallelogram equal to a given rectilinear figure in a given rectilinear angle.	14;29;30;34;42;44	14;29;30;34;42;44	14,29;30;34;42;44	14,29;30;34;42;44	29;30;34;42;44	14,29;30;34;42;44	29;30;34;42;44	14,29;30;34;42;44	29;30;34;42;44	30;34;42;44
46: To describe a square on a given straight line.	3;11;29;31;34	3;11;29;31;34	3;11;29;31;43	29;31;43	3;29;43	3;11;29;31;34	29;31;34	3;11;29;31;34	11;29;31;34	31;34
47: In right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle.	14;31;41;46	14;31;41;46	14;31;41;46	14;31;41;46	41;46	14;31;41;46	14;31;41;46	14;31;41;46	4;14;31;41;46	31;41;46
48: If in a triangle the square on one of the sides equals the sum of the squares on the remaining two sides of the triangle, then the angle contained by the remaining two sides of the triangle is right.	3;8;11;47	3;8;11;47	3;8;11;47	47	47	3;8;11;47	11;47	3;8;47	8;11;47	47

Bijlage 3: Minimale tijdslogika en tijdsvertakkingen[196]

K_t: Minimale tijdslogika

Axioma's:

G1	G(p⊃q)(Gp⊃Gq)
H1	H(p⊃q) ⊃ (Hp⊃hq)
G2	~H~Gp ⊃ p
H2	~G~Hp ⊃ p

Afleidingsregels:

RT	Indien A een klassieke tautologie is, dan is A een stelling van K_t
RH	Als A een stelling is, dan is HA ook een stelling.
RG	Als A een stelling is, dan is GA ook een stelling.
RD	Als A en A⊃B stellingen zijn, dan is B ook een stelling. (modus ponens)

K_b: Tijdsvertakkingen

Aan de axioma's en afleidingsregels van K_t worden volgende axioma's toegevoegd:

G3	Gp⊃GGp
H3	Hp⊃ HHp
H4	[H(p∨q)&H(p∨Hq)&H(Hp∨q)] ⊃ (Hp∨Hq)

Hp: "p is tot nu toe altijd waar"

Gp: "p is vanaf nu altijd waar"

[196] [TL 55-87]

Bijlage 4: De Axioma's van Ray d'Inverno

Axioma I voor de speciale relativiteitstheorie:

Ruimte en tijd worden voorgesteld door een vierdimensionele manifold met een symmetrische affiene konnektie $\Gamma^a{}_{bc}$ en een metrische tensor $\mathbf{g_{ab}}$ zodanig dat:

i. $\mathbf{g_{ab}}$ niet-singulair is met signatuur -2;
ii. $\nabla_c \mathbf{g_{ab}} = 0$;
iii. $R^a{}_{bcd} = 0$ met $R^a{}_{bcd} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_c\Gamma^a{}_{bd} - \partial_d\Gamma^a{}_{bc} + \Gamma^\varepsilon{}_{bd}\,\Gamma^a{}_{ec} - \Gamma^\varepsilon{}_{bc}\,\Gamma^a{}_{ed}$.

Axioma II voor de speciale relativiteitstheorie:

Er bestaan de volgende bevoorrechte klassen van krommen in de manifold:

i. ideale klokken reizen volgens tijdachtige krommen en meten de parameter τ gedefinïeerd door $d\tau = \mathbf{g_{ab}}dx^a dx^b$;
ii. vrije deeltjes reizen langs tijdachtige geodetische lijnen;
iii. lichdeeltjes reizen langs nullijnen.

Axioma I voor de algemene relativiteitstheorie:

Ruimte en tijd worden voorgesteld door een vierdimensionele manifold met een symmetrische affiene konnektie $\Gamma^a{}_{bc}$ en een metrische tensor $\mathbf{g_{ab}}$ zodanig dat:

i. $\mathbf{g_{ab}}$ niet-singulair is met signatuur -2;
ii. $\nabla_c \mathbf{g_{ab}} = 0$;
iii. $G^{ab} = \kappa T^{ab}$ met $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} 8\pi G/c^4$.

Axioma II voor de algemene relativiteitstheorie:

Ideale klokken vormen een bevoorrechte klasse van krommen in de manifold die reizen volgens tijdachtige krommen en de parameter τ gedefinïeerd door $d\tau = \mathbf{g_{ab}}dx^a dx^b$ meten.

<u>**Bijlage 5: De axioma's van Robert Goldblatt**</u>

Axioma's voor de affiene ruimte

AS1	$\mathsf{B}(xyx) \Rightarrow x=y$
AS2	$\mathsf{B}(xyz)\ \&\ \mathsf{B}(yzu)\ \&\ y \neq z \Rightarrow \mathsf{B}(xyu)$
AS3	$\mathsf{B}(xyz)\ \&\ \mathsf{B}(xyu)\ \&\ x \neq z \Rightarrow \mathsf{B}(yzu) \vee \mathsf{B}(yuz)$
AS4	$\exists x:[\mathsf{B}(xyz)\ \&\ x \neq y]$
AS5	$\mathsf{B}(xtu)\ \&\ \mathsf{B}(yuz) \Rightarrow \exists v:[\mathsf{B}(xvy) \& \mathsf{B}(ztv)]$
AS6	$\exists x_1 \ldots \exists x_5:[\sim \mathsf{TF}(x_1 \ldots x_5)\ \& \forall z: \mathsf{FF}(x_1 \ldots x_5 z)]$
AS7	$\mathsf{B}(xut)\ \&\ \mathsf{B}(yuz)\ \&\ x \neq u \Rightarrow \exists v \exists w:[\mathsf{B}(xyv) \& \mathsf{B}(xzw) \& \mathsf{B}(vtw)]$
AS8	Axiomaschema: $\exists z \forall x \forall y:[\varphi \& \psi \Rightarrow \mathsf{B}(zyx)] \Rightarrow \exists u \forall x \forall y:[\varphi \& \psi \Rightarrow \mathsf{B}(xuy)]$ waarbij φ gelijk welke formule is met x vrij maar y,z en u niet; en waarbij ψ gelijk welke formule is met y vrij, maar niet x,z en u.

Axioma's voor de metrisch geordende ruimte

OS1	$xy \perp zw \Rightarrow zw \perp xy$
OS2	$[\mathsf{P}(xyzw) \Rightarrow xy \perp zw] \vee \exists t[\mathsf{P}(xyzt) \forall u(\mathsf{P}(xyzu) \Rightarrow (xy \perp zu \Leftrightarrow \mathsf{L}(tzu)))]$
OS3	$[xy \perp zw\ \&\ xz \perp yw] \Rightarrow xw \perp yz$
OS4	$[xy \perp yw\ \&\ xy \perp yz\ \&\ \mathsf{P}(yzwu)] \Rightarrow xy \perp yu$
OS5	$[xy \perp zw\ \&\ zw \parallel uw] \Rightarrow sy \perp uv$

Axioma's voor de Minkowskiaanse ruimte

M1	$\forall x \forall y \exists w: \sim(xy \perp yw)$
M2	$\exists x \exists y: (x \lambda y)$
M3	$[x \lambda y\ \&\ z \lambda w\ \&\ xy \perp zw] \Rightarrow xy \parallel zw$

Bijlage 6. De axioma's en de stellingen 1 tot 23 van John W. Schutz[197]

O1	Voor gebeurtenissen a,b,c∈$\mathcal{E}$: [abc] ⇒ Q∈$\mathcal{P}$: a,b,c ∈ Q
O2	Voor gebeurtenissen a,b,c∈$\mathcal{E}$: [abc] ⇒ [cba]
O3	Voor gebeurtenissen a,b,c∈$\mathcal{E}$: [abc] ⇒ a,b en c zijn verschillend.
O4	Voor verschillende gebeurtenissen a,b,c,d∈$\mathcal{E}$: [abc] en [bcd] ⇒ [abd]
O5	Voor elk pad Q∈$\mathcal{P}$ en elke drie verschillende gebeurtenissen a,b,c∈Q, [abc] of [bca] of [cab] of [cba] of [acb] of [bac]
O6 **kollineariteit**	Als Q, R en S verschillende paden zijn die kruisen op gebeurtenissen a∈Q∩R, b∈Q∩S, c∈R∩S en als (i) er een gebeurtenis d∈S is zodanig dat [bcd], en (ii) er een gebeurtenis e∈R en een pad T door zowel d als e zodanig dat [cea] dan kruisen T en Q in een gebeurtenis f dat behoort tot de eindige keten [a..f..b]
I1 **existentie**	$\mathcal{E}$ is niet ledig
I2 **verbondenheid**	Voor elke twee verschillende gebeurtenissen a,b∈$\mathcal{E}$ zijn er paden R,S zodanig dat a∈R, b∈S en R∩S.
I3 **uniciteit**	Voor elke twee verschillende gebeurtenissen is er ten hoogste één pad dat beiden bevat.
I4 **dimensie**	Indien $\mathcal{E}$ niet ledig is, bestaat er ten minste één 3-SPRAY.
I5 **non-galileïsch**	Voor elk pad Q en elke gebeurtenis b∉Q, bevat de onbereikbare verzameling Q(b,∅)$\overset{def}{=}${x: er is geen pad dat b en x bevat, x∈Q} ten minste twee gebeurtenissen.
I6 **verbondenheid van de onbereikbare verzameling**	Gegeven een pad Q, een gebeurtenis b∉Q, en verschillende gebeurtenissen Q_x,Q_z∈Q(b,∅), bestaat er een eindige keten [Q_0...Q_n] met Q_0=Q_x en Q_n=Q_z zodanig dat voor alle i∈{1,2,...,n} geldt: Q_i∈Q(b,∅) [Q_{i-1} Q_y Q_i] ⇒ Q_y∈(b,∅)
I7 **begrensdheid van de onbereikbare verzameling**	Gegeven een pad Q, een gebeurtenis b∉Q en gebeurtenissen Q_x∈Q\Q(b,∅) en Q_yQ\Q(b,∅), bestaat er een eindige keten [Q_0...Q_m...Q_n] met Q_0=Q_x, Q_m=Q_y en Q_n∈Q\Q(b,∅).
S **symmetrie of isotropie**	Als Q,R,S verschillende paden zijn die snijden in een gebeurtenis x en als Q_a∈Q een gebeurtenis verschillend van x is zodanig dat Q(Qa,R,x,∅)=Q(Qa,S,x,∅); dan bestaat er een afbeelding θ:$\mathcal{E}$→$\mathcal{E}$ die een bijektie Θ:$\mathcal{P}$→$\mathcal{P}$ voortbrengt zodanig dat de gebeurtenissen van Q invariant zijn, en Θ:R→S.
C **Kontinuïteit**	Elke oneindige begrensde keten heeft een meest nabije grens

[197] Zoals in [IAM]

axioma-theorema matrix	O1	O2	O3	O4	O5	O6	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	S	C
1 [abc]⇔[abc]		*	*	*											
2 orde op een eindige keten		*	*	*											
3 **Collineatiteit (1)**		2	2	2		*									
4 **gebondenheid van de onbereikbare verzameling**		2	2	2									*		
5 existentie (1)	*	4	4	4				*	*		*				
6 **prolongatie**		1;4	1;4	1;4							*				
7 Kollineariteit (2)		1;3	1;3	1;3		3			*						
8 "Veblen th. 6"		1;7	*;1;7	1;7	*	7			*						
9 "Veblen th. 9"		1;4;8	1;4;8	*;1;4,8	*;8	8		5	5;8		*;5		4		
10 **"Veblen th. 10"**		2;9	2;9	*;2;9	9	9		9	9		9		9		
11 **"Veblen th. 11"**		1;10	1;10	1;10	10	10		10	10		10		10		
12 **Kontinuïteit**	5	1;2;5	1;2;5	1;2;5	*			5	5		5				*
13 **verbondenheid van de onbereikbare verzameling**		11	11	11	11	11		11	11		11	*	11		
14 **Eksistentie (2)**		4;6;10;13	4;6;10;13	4;6;10;13	10;13	10;13		10;13	10;13		6;10;13	13	4;10; 13		
15 **Kollineariteit (3)**		7;8;10;14	7;8;10;14	7;8;10;14	7;8;10;14	7;8;10;14		10;14	*;7;8;10;14		10;14	14	10;14		
16 **er bestaat geen snelste pad**	12	4;12;13;15	4;12;13;15	4;12;13;15	12;13;15	13;15		12;13;15	12;13;15		12;13;15	13	4;13;15		12
17	5;16	5;16	5;16	5;16	16	16		5;16	5;16		5;16	16	5;16		16
18	5	3;5;7;13;14;15	3;5;7;13;14;15	3;5;7;13;14;15	13;14;15	3;7;13;14;15		5;13;14;15	5;7;13;14;15		5;13;14;15	13;14;15	13;14;15		
19 **+1,3,8,13,18!!**	12;16	7;12;15;16	7;12;15;16	5;7;14	15;16	7;15;16		12;15;16	7;12;15;16		12;15;16	15;16	15;16		12;16
20	5	5;7;14	5;7;14	5;7;14	14	7;14		5;14	5;7;14		5;14	14	14		
21 **isotropie mapping is bijektie**	16	16	16	16	16	16	*	*;16	*;16	*	16	16	16	*	16
22	12;16	3,15;16	3,15;16	3,12,15;16	12,15;16	3,15;16		12,15;16	12,15;16		12,15;16		15;16		12;16
23	21;22	7;10;14;15;21;22	7;10;14;15;21;22	7;10;14;15;21;22	10;14;15;21;22	7;10;;14;15;21;22	21	10;14;15;21;22	10;14;15;21;22	7;21	*;10;14;15;21;22	14;15;21	10;14;15;21;22	21	21,22

Bijlage 7. De postulaten voor Branching Space-Time van Nuel Belnap

B1 **existentie**	$OW \neq \emptyset$
B2 **partiële orde**	$\forall e \in OW:\ e \leqslant e$ $\forall e_0, e_1, e_2 \in 0W: (e_0 \leqslant e_1\ \&\ e_1 \leqslant e_2) \Rightarrow e_0 \leqslant e_2$ $\forall e_0, e_1: (e_0 \leqslant e_1\ \&\ e_1 \leqslant e_0) \Rightarrow e_0 = e_1$
B3	$\forall e_0:[e \in OW \Rightarrow \exists e_1:(e_1 \in OW\ \&\ e_0 < e_1)]$
B4	$\forall e_0, e_2: e_0 < e_2 \Rightarrow \exists e_1:[e_0 < e_1\ \&\ e_1 < e_2]$
B5	O is een uitkomstketen $\Rightarrow \exists\ \inf(O)$
B6	I is een initiële keten $\Rightarrow \exists\ \sup_h(I)$
B7	Gegeven twee initiële ketens en twee geschiedenissen, dan wordt de orde van de respektieve suprema behouden wanneer de geschiedenissen variëren: wanneer $I_1 \cup I_2 \subseteq h_1 \cap h_2$ dan $\sup_{h1}(I_1) < \sup_{h1}(I_2) \Leftrightarrow \sup_{h2}(I_1) < \sup_{h2}(I_2)$ en $\sup_{h1}(I_1) = \sup_{h1}(I_2) \Leftrightarrow \sup_{h2}(I_1) = \sup_{h2}(I_2)$.
B8	Indien een uitkomstketen bevat is in één geschiedenis maar niet in een andere, dan is er in het strikte verleden van de keten een keuzepunt voor deze twee geschiedenissen.

Bijlage 8: Notatie.

De notatie die specifiek is aan het onderwerp wordt in de tekst zelf geïntroduceerd.
Deze verhandeling ontleent veel notatie aan de formele logika en bij uitbreiding de wiskundige logika enerzijds en aan de wiskundige natuurkunde anderzijds. Ik heb in de tekst de verschillende notaties van de verschillende auteurs waar mogelijk aangepast om konsistent te zijn met onderstaande notatie.

Wiskundige logika:

Logische operatoren worden semantisch ingevoerd:

		negatie	konjunktie	(inklusieve) disjunktie	materiële implikatie	ekwivalentie	eksklusieve disjunktie
p	q	~p	p&q	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \oplus q$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
interpretatie		niet p	p en q	p of q	als p dan q	p als en slechts dan als q	ofwel p, ofwel q

Alle logische operatoren die hierboven niet gedefinïeerd zijn, zijn modale operatoren[198].
De verzameling van natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, reële getallen $\mathbb{R}$ en de verzameling van rationale getallen $\mathbb{Q}$, de lege verzameling $\varnothing$.
Kwantoren: er bestaat $\exists$, voor alle $\forall$. Het dubbele punt na de kwantoren is esthetisch.
Klasse-operatoren: Element van $\in$, geen element van $\notin$, deelverzameling van $\subset$, niet-stikte varianten zoals $\subseteq$ en omgekeerden zoals $\ni$. Unie $\cup$, doorsnede $\cap$,.

Wiskundige natuurkunde:

Vektoren komen voor in 2 dimensies (bv. $\mathbf{O} \stackrel{def}{=} (0,0)$ en $\mathbf{a}=(7,-6)$ in het Lorentz-vlak), in 3 dimensies (bv. $\mathbf{O} \stackrel{def}{=} (0,0,0)$ en $\mathbf{a}=(7,-6,\pi)$ in de Euklidische ruimte) en in 4 dimensies (bv. $\mathbf{O} \stackrel{def}{=} (0,0,0,0)$ en $\mathbf{a}=(7,-6,\pi,8)$ in Minkowski tijdruimte) en staan, net zoals tensoren, in vet.
De afgeleide d/dx, de partiële afgeleide $\partial/\partial x$
De vektor nabla of del is $\boldsymbol{\nabla} \stackrel{def}{=} (\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)$. De Laplaciaan is $\Delta \stackrel{def}{=} \boldsymbol{\nabla}^2=(\partial^2/\partial x^2,\partial^2/\partial y^2,\partial^2/\partial z^2)$.
De divergentie van een vektor $\mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$ is gelijk aan het skalair (produkt) $\mathrm{div}\mathbf{A} \stackrel{def}{=} \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{A} = \partial A_x/\partial x+\partial A_y/\partial y+\partial A_z/\partial z$.
De rotor van een vektor $\mathbf{A}$ is gelijk aan vektor(iëel produkt) $\mathbf{rotA} \stackrel{def}{=} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=(\partial A_z/\partial y-\partial A_y/\partial z,\partial A_x/\partial z-\partial A_z/\partial x,\partial A_y/\partial x-\partial A_z/\partial y)$.
De integraal $\int$, de kringintegraal $\oint$, de oppervlakte-ingtegraal $\oiint$
Sommatie $\sum$ is expliciet.
De vierkantswortel $\sqrt{(\ldots)}$ of $(\ldots)^{½}$.

198 Definitie van "modale" operator volgens Belnap [FF]. Door deze operatoren als dusdanig te definiëren wordt onder meer een inhoudelijke en historische uitwerking van het begrip modaliteit ontweken.

bibliografie

In de referenties worden de afkortingen gevolgd door de bladzijde(n), met uitzondering van referenties naar werken die hun eigen referentiesysteem gebruiken (zoals [MWB]) in welk geval ik de auteur volg.

[LART] Andréka, H. Madarasz, J. X. and Németi, I.
Logical analysis of relativity theories
In: Hendricks et al. (eds.): First-Order Logic Revisited, Logos Verlag Berlin (2004), 1-30

[E&P] Auffray, Jean-Paul
Einstein et Poincaré, sur les traces de la relativité
Éditions Le Pommier-Fayard, 1999, ISBN 2-746-50015-9

[NTA] Auffray, Jean-Paul
Newton, ou le triomphe de l'alchemie
Éditions Le Pommier-Fayard, 2000, ISBN 2-746-50060-4

[BR] Baierlein, Ralph
Newton to Einstein, the trail of light
Cambridge University Press, 1992 (Paperback 2001), ISBN 0-521-42323-6

[HML] Barwise, Jon
Handbook of mathematical logic
Elsevier/North Holland, Amsterdam, 1977 (edition 1999), ISBN 0-444-86388-5

[BST] Belnap, Nuel
Branching space-time
Synthese 92
Kluwer Academic Publishers, 1992

[NFBST] Belnap, Nuel
New foundations for branching space-time
October 2000 (unpublished)

[FF] Belnap, Nuel, Perloff Michael & Xu, Ming
Facing the future, Agents and Choices in Our Indeterminist World
Oxford University Press, Oxford, 2001, ISBN 0-19-513878-3

[BSTGHZ] Belnap, Nuel & Szabó, László E.
Branching Space-time analysis of the GHZ theorem
20 Augustus 1996

[EPRBST] Belnap, Nuel
EPR-like "funny business" in the theory of branching space-time
3 september 2002

[AETIP] Christopher Jon Bjerknes
Albert Einstein, The Incorrigible Plagiarist
XTX Inc., 2002, ISBN 0-9719629-8-7

[AOEGTR] Christopher Jon Bjerknes
Anticipations of Einstein in the general theory of relativity
XTX Inc., 2002, ISBN 0-9719629-6-0

[MS] Cornelis, Gustaaf C; Smets Sonja & Van Bendegem Jean Paul
Metadebates on science. The Blue Book of Einstein meets Magritte,
VUB University Press & Kluwer Academic Publishers,
Dordrecht, 1999, ISBN 90-5487-231-4

[MWB] Dijksterhuis, Eduard Jan
De mechanisering van het wereldbeeld
J.M. Meulenhoff bv, Amsterdam, 1950 (zevende druk 1996), ISBN 90-290-5342-9

[ELWM] Einstein, Albert; Lorentz, Hendrik Antoon; Weyl Hermann
en Minkowski Hermann
The principle of relativity: a collection of original papers on the special and general theory of relativity, notes by A. Sommerfeld, translated by W. Perrett and G.B. Jefferey
Dover Publications Inc, New York, 1952, SBN 486-60081-5

[RSAT] Einstein, Albert
Relativiteit, de speciale en de algemene theorie
(oorspronkelijke uitgave in het Duits: 1916)

[FPUSLV] Ernst, Andreas & Hsu, Jong-Ping
First Proposal of the Universal Speed of Light by Voigt in 1887
Chinese Journal Of Physics, Vol. 39, No. 3 June 2001

[ELEM] Euklides
The thirtheen books of Euclid's Elements, translated and with an introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath (3 volumes)
Dover Publications, New York, 1995 (herdruk 1956)

[LTB1] Gamut, L.T.F.
Logica, taal en betekenis 1
Inleiding in de logica
1982 Het Spectrum, Utrecht, ISBN 90-274-6229-1

[LTB2] Gamut, L.T.F.
Logica, taal en betekenis 2
Intensionele logica en logische grammatica
1982 Het Spectrum, Utrecht, ISBN 90-274-6230-5

[RSR] Enrico Giannetto, Dipartimento di Fisica "A. Volta", Università di Pavia
The rise of special relativity: Henri Poincaré's works before Einstein
ATTI DEL XVIII CONGRESSO DI STORIA DELLA FISICA E DELL'ASTRONOMIA

[OSG] Goldblatt, Robert
Orthogonality and Spacetime Geometry
1987 Springer Verlag, ISBN 0-387-96519-X & 3-540-96519-X

[E&NEG] Greenberg, Marvin Jay
Euclidean and non-euclidean geometries, development and history
W.H. Freeman, San Francisco, 1974, ISBN 0-7167-0454-4

[TCWWTW] Heinlein, Robert A.
The cat who walks through walls
1985

[TP] Held, Klaus
Trefpunt Plato
Rainbow pockets

[FG] Heyenoort, Jean van
From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931
Harvard, 1967 (edition 2000), ISBN 1-58348-597-X

[IER] d'Inverno, Ray
Introducing Einstein's relativity
Clarendon Press, Oxford, 1992 (edition 2000), ISBN 0-19-859686-3

[COS] Jammer, Max
Concepts of space. The history of theories of space in physics
Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, 1969

[HS] Kaku, Michio
Hyperspace. A scientific odyssey through the 10th dimension
Oxford University Press, Oxford, 1994, ISBN 0-19-286189-1

[VPM] Lanczos, Cornelius
The variational principles of mechanics
Dover Publications, New York, 1949 (Fourth edition 1970), ISBN 0-486-65067-7

[MONAD] Leibniz, Gottfried Wilhelm
Monadologie of de beginselen van de wijsbegeerte,
Ingeleid, vertaald en geannoteerd door dr. F.P.M. Jespers
Kok agora, Kampen, 1991, ISBN 90-242-7727-2

[ST&EM] Lucas, J.R. & Hodgson P.E.
Spacetime & electromagnetism
Clarendon Press, Oxford, 1990, ISBN 0-19-852039-5

[M&M] Maxwell, James Clerk
Matter and motion (Notes and appendices by sir Joseph Larmor)
Dover Publications Inc., New York, ISBN 0-486-66895-9

[HPH] Nave, Carl Rod
Hyperphysics
Georgia State University, Atlanta
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html

[OR] J.J. O'Connor & E.F. Robertson
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Light_1.html
en andere paginas op dezelfde site

[OH] Ohanian, Hans C
Physics
W.W. Norton & Co, New York, 1985, ISBN 0-393-95401-3

[PZ] Parmenides & Zeno
Het leerdicht en de paradoxen: Fragmenten vertaald en van wijsgerig en historisch commentaar voorzien door J. Mansfeld
Kok Agora, Kampen, 1988, ISBN 90-242-7593-8

[SM] Poincaré, Jules Henri
La science et la méthode

[SH] Poincaré, Jules Henri
La science et l'hypothèse
Flammarion, Paris, 1902
(Engelse vertaling: http://spartan.ac.brocku.ca/~lward/Poincare/Poincare_1905_toc.html)

[FHM] Ratcliffe, John G
Foundations of hyperbolic manifolds
Springer Verlag, New York, 1994

[EMA] Reignier, Jean
Éther et mouvement absolu au XIX° siècle

[TL] Rescher, Nicholas & Urquhart, Alasdair
Temporal Logic
Springer Verlag, Wien, 1971, ISBN 3-211-80995-3

[RL2] Rescher, Nicholas
Leibniz, an introduction to his philosophy
Basil Blackwell, Oxford, 1979, ISBN 0 631 11570 6

[SAHM] Rouse Ball, W.W.
A Short Account of the History of Mathematics
1908, http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/RBallHist.html

[FSR] Schutz, John W.
Foundations of Special Relativity - Kinematic Axioms for Minkowski Space-Time
Lecture Notes in Mathematics, 361
Springer Verlag, Berlin, 1973, ISBN 3-540-06591-1

[IAM] Schutz, John W.
Independent axioms for Minkowski space-time
Pitman Research Notes in Mathematics Series Volume 373
Addison-Wesley-Longman, Harlow 1997, ISBN 0 582 31760 6

[LPPSDP] Smets, Sonja

The logic of physical properties in static and dynamic perspective
Doktoraatsverhandeling, Vrije Universiteit Brussel, 2001

[HMLLP] Styazhkin, N.I.
History of mathematical logic from Leibniz to Peano
M.I.T. Press, Cambridge Massachusetts, 1969, SBN 262 19057 5

[SP] Taylor, Edwin F & Wheeler, John Archibald
Spacetime Physics
W.H. Freeman, San Francisco, 1963

[VBL1] Van Bendegem, Jean Paul
Logika: 1ste deel, inleiding tot de formele logika
Kursusdienst Vrije Universiteit Brussel, 1989

[VBL2] Van Bendegem, Jean Paul
Logika: 2de deel, wetenschapsfilosofische tema's
Kursusdienst Vrije Universiteit Brussel, 1989

[TIDE] Van Bendegem, Jean Paul
Tot in der Eindigheid. Over wetenschap, new age en religie
Hadewijch, Antwerpen-Baarn, 1997, ISBN 90-5240-425-9

[NESH] Walter, Scott
The non-Euclidean style of Minkowskian relativity
1999, http://www.univ-nancy2.fr/ENSGT/PHILO/walter/nesh.html

[IDGGR] Warner, Stefan
Introduction to differential geometry & general relativity
2001, http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Warner/RealWorld/pdfs/DiffGeom.pdf

[WIT] Whitrow, G.J.
Wat is tijd? Het tijdsbegrip in historisch perspectief en in de natuurwetenschap. Het belang van de factor tijd in het wetenschappelijk wereldbeeld
Aula 516, Uitgeverij Het Spectrum, Utrecht, 1974, ISBN 90-274-5262-8

[TLP] Wittgenstein, Ludwig
Tractatus logico-philosophicus
Vertaald door W.F. Hermans, Polak & Van Gennep, Amsterdam, 1973

[SNEG] Yaglom, I. M.
A simple non-euclidean geometry and its physical basis
Springer Verlag, NY (1979) – ISBN 0-387-90332-1

[CILG] Zeeman, E.C.
Causality implies the Lorentz Group
Journal of Mathematical Physics Vol. 5, Nr. 4, 1964

lijst van afbeeldingen

Abstract

A logical study of aspects of time and space

In this paper, the central point of attention is the axiomatic approach to Minkowski time-space model from the special relativity theory of Voigt, Lorentz, Poincaré and Einstein.

In a first part, the philosophical and historical background on thinking about space and time is outlined from the classical Greek philosophers over Newton, Leibniz and Maxwell up to modern theories like general relativity and quantum mechanics. This is far from a complete description but is solely intended to situate the Minkowski time-space and to introduce the concepts needed for the discussion.

In a second part, several axiomatic approaches to Minkowski time-space are discussed. Except for the Axioms by D'Inverno which are of a higher level, those axiomatic systems are based on the observation by Robb that Minkowski time-space can be constructed from a single causal or temporal order relation. Goldblatt builds a theory on quaternary "orthogonality" and ternary "betweenness" relations; continues by proving that both these relations can be constructed from Robb's "after" relation and concludes by using the Aleksandrov-Zeeman-Hua theorem to obtain the Lorentz transformations. Goldblatt's system is first order, decidable and consistent but not categorical nor independent. Schutz builds a categorical and independent but second order and non decidable axiom system on a single ternary "betweenness" relation. Based on this single betweenness relation, he defines the binary partial temporal order relation. The final system discussed, Branching Space-Time by Belnap, is not an axiom system for Minkowski time-space but intends to be more general and includes phenomena like the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. The point of Belnap's BST is to prove there is no formal inconsistency between relativity theory and indeterminism. BST uses a single causal order relation, but has no notion of dimensionality nor metric.

In the final part, the main concepts needed to construct a model of space and time are discussed.

Abstrait

Les aspects logiques de l'espace et du temps.

Le but principal de ce travail est l'étude du modèle Temps/Espace proposé par Marcolongo et Minkowski pour la théorie de la relativité spéciale de Voigt, Lorentz, Poincaré et Einstein.

La première partie de ce travail retrace l'évolution historique et philosophique de la pensée à propos de l'Espace et du Temps, en partant de la pensée grecque classique, passant par Newton, Leibniz et Maxwell, pour terminer par les théories modernes. Le but de ce travail n'est en aucun cas de donner une description exhaustive de cette évolution, mais bien plutôt d'introduire les concepts nécessaires aux discussions de la deuxième partie, et replacer l'Espace-Temps de Minkowski dans son contexte conceptuel.

La seconde partie de ce travail présente et discute quatre approches axiomatiques des théories de Minkowski: l'axiomatique D'Inverno d'ordre supérieure dans le sens que certaines conceptions mathématiques avancées sont supposées comme primitive, le système de Goldblatt, celui de Schutz et, enfin, le branchement (BST) de Belnap. Toutes ces axiomatiques – sauf celui de D'Inverno – sont basées sur l'observation de Robb que l'Espace-Temps de Minkowski peuvent être construites à partir d'une unique relation d'ordre causal ou temporel. Goldblatt construit ainsi un système basé sur une orthogonalité à quatre arguments et une relation ternaire qui exprime le concept "entre"; il prouve ensuite que ces deux relations peuvent être construites à partir de la relation "après" de Robb; et finalement il deduit les transformations de Lorentz en utilisant le théorème d'Aleksandrov-Zeeman-Hua. Le système qu'obtient ainsi Goldblatt est de premier ordre, décidable et consistant, mais il n'est ni catégorique, ni indépendant. Schutz, quant à lui, met au point un système catégorique et indépendant mais du second ordre. Il se base pour cela sur une relation unique et ternaire "entre" et définit une relation temporelle binaire d'ordre partiel. Le dernier système abordé dans ce travail est le Branchement Espace-Temps (BST) de Belnap. Ce n'est plus ici un système axiomatique limité pour Minkowski mais à tendance plus général, en incluant des phénomènes tels que le paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen. L'apport de Belnap est la preuve qu'il n'y a aucune contradiction entre la théorie de la relativité et l'indéterminisme. Cette théorie met en place une unique relation causale de premier order sans utiliser la notion de dimentionnalité ou de mesure.

Inhoud: